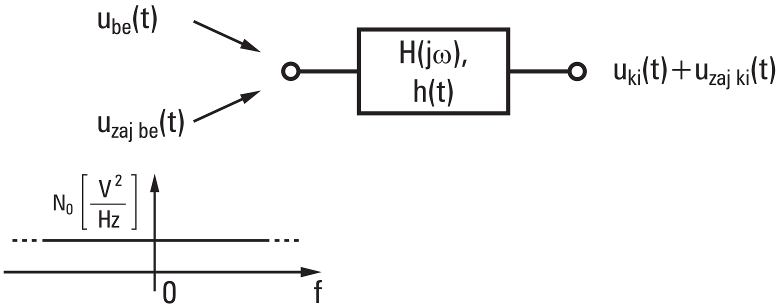
8 FÜGGELÉK

Digitális jelátvitelnél az a célunk, hogy a döntőáramkörön a jel-zaj viszony a mintavételi időpillanatokban a lehető legnagyobb legyen. A zajos jelet ezért egy megfelelően méretezett szűrőn (1. ábra) engedjük át, a döntőáramkört pedig a szűrő kimenetére csatlakoztatjuk. A szűrő bemenetén a zaj az ábrán látható N_0 teljesítménysűrűségű Gauss-eloszlású fehérzaj.



1. ábra
Jelátvitel illesztett szűrővel

A jel- és zajteljesítményeket nemzetközileg szokásosan a feszültségek négyzetével jellemezzük, így pl.

$$N_0 = \Delta U_{zeff}^2 / \Delta f \quad \left[V^2 / Hz\right],$$

ahol ΔU_{zeff}^2 a Δf sávban lévő zajfeszültség négyzetes átlaga. Írjuk fel *S/N*-et, azaz a jel-zaj viszonyt a szűrő kimenetén a $t = t_0$ pillanatban az inverz Fourier-transzformáció felhasználásával:

$$\frac{S}{N} = \frac{\left[\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} U_{be}(j\omega)H(j\omega)e^{j\omega t_0}\,d\omega\right]^2}{N_0 \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|H(j\omega)\right|^2 d\omega}. \tag{1}$$

A számláló szögletes zárójelében lévő kifejezés úgy értelmezhető, hogy a kimenőjel szinuszos feszültségek szuperpoziciója, ahol valamely ω frekvencia környezetéhez tartozó összetevő a t_0 pillanatban:

$$du_{ki}(t_0) = \frac{1}{2\pi}U_{be}(j\omega)H(j\omega)e^{j\omega t_0}\,d\omega. \tag{2}$$

A nevezőben a zajteljesítményt a diszkrét spektrumokra érvényes $P_{átlag} = \frac{1}{R}\sum\limits_{-\infty}^{\infty}\left|C_n\right|^2$ összefüggés analógjaként a folytonos spektrum miatt most integrálkifejezéssel kell megadnunk. A továbbiakban azt a komplex $H(j\omega)$ átviteli karakterisztikát keressük, amely a szűrő kimenetén a $t = t_0$ pillanatban maximális jel-zaj viszonyt biztosít. Ehhez először írjuk fel *S/N*-et az alábbi formában:

$$\frac{S}{N}=\frac{\left[\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|U_{be}(j\omega)\right|\left|H(j\omega)\right|e^{j(\varphi_{be}+\varphi_H+\omega t_0)}d\omega\right]^2}{N_0\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|H(j\omega)\right|^2 d\omega}\quad . \tag{3}$$

Jelmaximum akkor jön létre, ha a frekvenciakomponensek azonos fázisban összegeződnek, azaz teljesül, hogy $\varphi_{be}(\omega)+\varphi_H(\omega)+\omega t_0 = \textit{állandó}$ minden frekvencián. Ha az *állandó* értéke 0, akkor az összegezendő szinuszkomponensek tisztán valós értéket eredményeznek, és ezzel

$$\frac{S}{N}=\frac{\left[\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|U_{be}(j\omega)\right|\left|H(j\omega)\right|d\omega\right]^2}{N_0\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|H(j\omega)\right|^2 d\omega} \tag{4}$$

Alkalmazzuk (4) számlálójára a

$$\left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)dx\right]^2 \le \int\limits_{-\infty}^{\infty} f^2(x)dx \int\limits_{-\infty}^{\infty} g^2(x)dx \tag{5}$$

Schwarz-féle egyenlőtlenséget (melynek bizonyítására a függelék végén kerül sor):

$$\frac{S}{N}\le\frac{\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|U_{be}(j\omega)\right|^2 d\omega\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|H(j\omega)\right|^2 d\omega}{N_0 2\pi\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|H(j\omega)\right|^2 d\omega}=\frac{\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|U_{be}(j\omega)\right|^2 d\omega}{N_0}. \tag{6}$$

Mivel az egyenlet jobb oldala a kimeneti jel-zaj viszony lehetséges maximumát adja, ezért az optimális szűrő átviteli karakterisztikáját azon $H(j\omega)$ írja le, amit (1)-be, ill. (3)-ba helyettesítve ez utóbbi kifejezést kapjuk. A keresett átviteli karakterisztika, amely teljesíti a fázisra felírt korlátozást is:

$$H(j\omega)=c\left|U_{be}(j\omega)\right|e^{-j\varphi_{be}}e^{-j\omega t_0}=cU_{be}^{*}(j\omega)e^{-j\omega t_0}, \tag{7}$$

azaz a bemenőjel spektrumának konjugáltja szorozva tetszőleges c konstanssal és $e^{-j\omega t_0}$-lal. Ez utóbbi az időtartományban t_0 idejű késleltetésnek felel meg. (7)-et (1)-be, ill. (3)-ba helyettesítve valóban (6) jobb oldalát kapjuk eredményül. A maximális jel-zaj viszony a t_0 pillanatban tehát

$$\left.\frac{S}{N}\right|_{\max}=\frac{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|U_{be}(j\omega)\right|^2 d\omega}{N_0}=\frac{E_{jel}}{N_0}, \tag{8}$$

ahol figyelembe vettük, hogy a számlálóban lévő integrálkifejezés a Parseval-tétel értelmében a jel energiájával egyenlő: így a kimeneten elérhető maximális jel-zaj viszony csak a jel energiájától és a bemeneti zaj teljesítménysűrűségétől függ. Az ilyen tulajdonságú szűrőket illesztett szűrőnek hívjuk.

Az illesztett szűrő mint korrelációs vevő

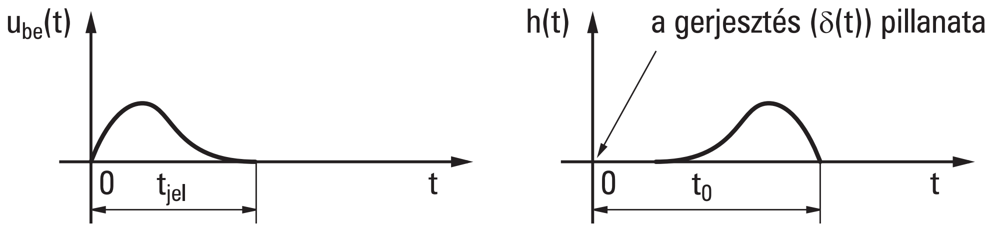
Vizsgáljuk először az illesztett szűrő impulzusválaszát vagy súlyfüggvényét. A súlyfüggvényt az átviteli karakterisztikából az inverz Fourier-transzformációval kapjuk:

$$h(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}H(j\omega)e^{j\omega t}d\omega=\frac{c}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}U_{be}^{*}(j\omega)e^{j\omega(t-t_0)}d\omega=cu_{be}\left[-(t-t_0)\right], \tag{9}$$

mert

$$\mathscr{F} f(-t)=F^{*}(\mathrm{j}\,\omega)\ . \tag{10}$$

A (9)-es összefüggés önmagában is érdekes: azt mutatja, hogy az illesztett szűrő súlyfüggvénye a vett jel tükörképe, azaz mintha a jelet a t_0 időponttól visszafelé rajzolnánk fel (2. ábra).



2. ábra
Az illesztett szűrő súlyfüggvénye

Kauzális szűrő esetén a t_0 késleltetésnek legalább t_{jel} -nek kell lennie, nehogy $h(t)$ a gerjesztés előtt, azaz már a 0 időpontnál korábban is létezzen.

A szűrő kimenetén megjelenő jel és zaj a bemenőjel és a bemenőzaj, valamint a szűrő súlyfüggvényének a konvolúciója:

$$u_{ki}(t)+u_{zaj\,ki}(t)=\int_{-\infty}^{\infty}[u_{be}(\tau)+u_{zaj\,be}(\tau)]\,h(t-\tau)d\tau\ . \tag{11}$$

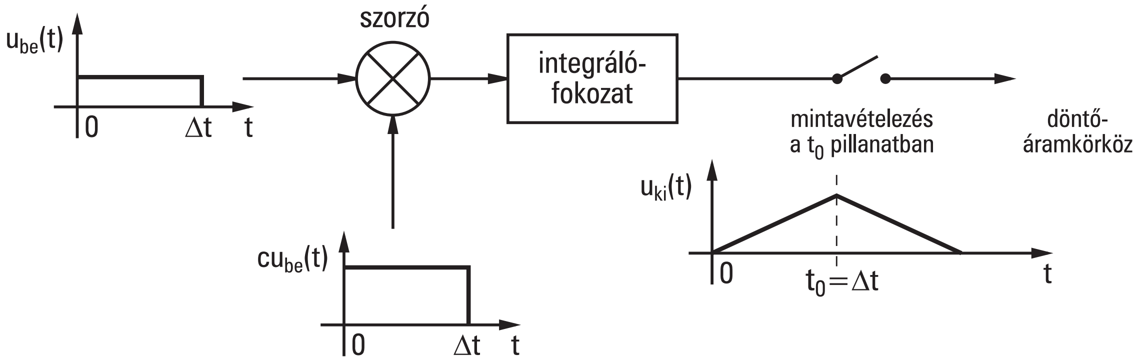
A $h(t)$-re kapott (9)-es összefüggést (11)-be helyettesítve azt kapjuk, hogy

$$u_{ki}(t)+u_{zaj\,ki}(t)=c\int_{-\infty}^{\infty}[u_{be}(\tau)+u_{zaj\,be}(\tau)]\;u_{be}[t+(\tau-t_0)]d\tau\;\;. \tag{12}$$

A t_0 pillanatban pedig:

$$u_{ki}(t_0)+u_{zaj\,ki}(t_0)=c\int_{-\infty}^{\infty}[u_{be}(\tau)+u_{zaj\,be}(\tau)]\;u_{be}(\tau)d\tau\;\;, \tag{13}$$

miszerint a kimenőjel előállítható egy szorzóáramkör és egy azt követő integráló-áramkör segítségével is (3. ábra). A szorzóáramkör egyik bemenetére a bemenőjelet, a másikra pedig ennek a vevőben előállított mását vezetjük, ami digitális jelátvitelnél megvalósítható. Az ezen az elven működő vevőt a bemenőjel és a szorzójel egymásnak való megfelelése miatt korrelációs vevőnek hívjuk. (13) jobb oldala szerint a kimeneti zajfeszültség is a helyileg előállított bemenőjelminta és a bemeneti zajfeszültség szorzatának integráljaként adódik. Tehát a korrelációs vevő ugyanazt a kimeneti jel- és zajfeszültséget szolgáltatja, mint az illesztett szűrő, így azonos a két áramkör kimenetén a jel-zaj viszony is.



3. ábra
Korrelációs vevő és jelalakjai, ha a vett jel négyszögimpulzus

Végezetül igazoljuk a $\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)dx\right]^2 \le \int_{-\infty}^{\infty} f^2(x)dx\int_{-\infty}^{\infty} g^2(x)dx$ un. Schwarz-féle egyenlőtlenséget.

Ehhez képezzük először az $l(x)=f(x)+\lambda\,g(x)$ függvényt, ahol λ tetszőleges valós szám. Mivel $l^2(x)$ pozitív, ezért írható, hogy

$$0\le\int_a^b l^2(x)dx\;\;.$$

Az egyenlőség akkor áll fenn, ha $l(x)=0$, azaz $0=f(x)+\lambda\,g(x)$, ill. $f(x)=-\lambda\,g(x)$. Az integrálkifejezésbe $l^2(x)$ helyére $[f(x)+\lambda\,g(x)]^2$-et írva, és a négyzetre emelést elvégezve azt kapjuk, hogy

$$0 \le \int_a^b l^2(x)dx = \int_a^b [f(x) + \lambda\, g(x)]^2 dx = \int_a^b f^2(x)dx + 2\lambda \int_a^b f(x)g(x)dx + \lambda^2 \int_a^b g^2(x)dx \ .$$

Ha a λ-ra kapott másodfokú kifejezés minden λ-nál nagyobb, mint nulla, akkor a neki megfelelő másodfokú egyenletnek nincs valós megoldása, azaz a diszkriminánsa negatív:

$$4\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)dx\right]^2 - 4\int_{-\infty}^{\infty} f^2(x)dx \int_{-\infty}^{\infty} g^2(x)dx \le 0 \ .$$

4-gyel való egyszerűsítés és átrendezés után a Schwarz-féle egyenlőtlenséghez jutunk.