

Desko Anatolij Vasziljovics

# Akusztikai mérőprogram-modul tervezése és megvalósítása MATLAB alatt

Szakdolgozat

**2008**

Széchenyi István Egyetem

Műszaki Tudományi Kar  
Jedlik Ányos Gépész-, Informatikai és Villamosmérnöki Intézet  
Távközlési Tanszék

Infokommunikációs szakirány

*Győr, 2010.december*

# Tartalomjegyzék

## **1. Bevezetés**

## **2. A jel fogalma**

### 2.1 Az analóg jelek digitális átalakítása

### 2.2 Az analóg és digitális jelek kapcsolata az időtartományban

### 2.3 Analóg jelek osztályozása és leírása

#### 2.3.1 Harmonikus rezgések

#### 2.3.2 Általánosan periodikus jelek

#### 2.3.3 Kvázi-periodikus jelek

#### 2.3.4 Tranziens jelek (átmeneti)

#### 2.3.5 Stacionárius, véletlenszerű jelek

#### 2.3.6 Nem stacionárius jelek

## **3. Analóg jelek digitális elemzése**

### 3.1 Periodikus függvények Fourier-sorba fejtése

#### 3.1.1 A valós leírású Fourier-sor

#### 3.1.2 A komplex írásmódú Fourier-sor

### 3.2 Nem periodikus jelek Fourier-analízise

#### 3.2.1 A Fourier-integrál

### 3.3 Mintavételezett jelek analízise

#### 3.3.1 Mintavételezett jelek Fourier-transzformáltja

#### 3.3.2 Diszkrét Fourier transzformáció (DFT)

#### 3.3.3 Időben korlátozott jelek analízise (Ablakolás)

#### 3.3.4 Gyors diszkrét Fourier-transzformáció (FFT)

## **4. Statisztikus folyamatok analízise**

### 4.1 A teljesítménysűrűség-spektrum

### 4.2 Az autokorreláció-függvény

### 4.3 Korrelációs analízis digitális rendszerekkel

### 4.4 Cepstrumanalízis

## **5. Számítógépes rendszeranalízis**

### 5.1 A súlyfüggvény és az átviteli függvény

### 5.2 Teljesítmény-átviteli függvény

### 5.3 Keresztkorreláció-függvény

### 5.4 Keresztteljesítménysűrűség-spektrum

### 5.5 Koherencia-függvény

## **6. MATLAB ismertetése**

### **6.1 MATLAB indítása**

### **6.2. Grafikus felület létrehozása**

### **6.3. Akusztikai mérőprogram-modul használata**

#### **6.3.1 Egyjeles analízis**

##### **6.3.1.1 Analizálási lehetőségek**

##### **6.3.1.2 További funkciógombok**

#### **6.3.2 Kétjeles analízis**

##### **6.3.2.1 Analizálási lehetőségek**

## **7. Mérőprogram tesztelése**

## **8. Összefoglalás**

## **9. Irodalomjegyzék**

## **10. Függelék**

## 1. Bevezetés

A számítógépek fejlődésével, teljesítményeik növekedésével lehetőségünk van a digitalizált jelek, statisztikai folyamatok hatékony és gyors elemzésére. A digitalizált világ rendkívüli mértékben megkönnyíti a mindennapjainkat, mely állítás bizonyítására egy tucatnyi előnyt felsorakoztathatnánk.

A megtervezett akusztikai mérőprogram-modul alkalmas lehet az akusztikai mérés technikában és elemzésben használatos függvények megjelenítésére és azok elemzését követően számos hasznos információ kinyerésére. Például az átviteli függvény segítségével jellemezhetünk egy rendszer (pl.: szűrő) átviteli jellemzőit, ha ismerjük a diszkrét bemenő-, és a hozzá tartozó kimeneti jelsorozatot.

A program két részre osztható, melyek az egyjeles és kétjeles vizsgálatot teszik lehetővé. Ennek helyes alkalmazásához ismernünk kell az analóg jelek feldolgozására és analízisére használt módszereket, továbbá az egyes jelek sajátosságait. A mérőprogram-modul bemutatását megelőzően a szükséges elméleti háttérrel igyekszem majd rendszerbe foglalni, segítve ezzel a mérési eredmények könnyebb megértését.

## **2. A jel fogalma**

A jelekkel foglalkozó tudomány meghatározása szerint a **jel** a valóság egy olyan, érzékszerveinkkel felfogható (látható, tapintható, hallható) darabja, jelensége, amely az emberi elme vagy értelem számára egy másik valóságdarabra, jelenségre utal (George Klauss megállapítása).

A híradástechnikában a jel nem más, mint a hír elektromos megfelelője. Az elektromos jelet általában az idő vagy a frekvencia függvényében szokás értelmezni.

A jelfolyamatot leíró függvényeket időfüggvényeknek szokás nevezni, és jelölésükre olyan függvényjelet alkalmaznak, amelynek argumentuma független változóként az időt is tartalmazza (pl.:  $f(t)$ ).

### **2.1. Az analóg jelek digitális átalakítása**

A jelfeldolgozás alapvető lényege az analóg jel konzerválása annak érdekében, hogy később tetszőleges célra felhasználhassuk azt.

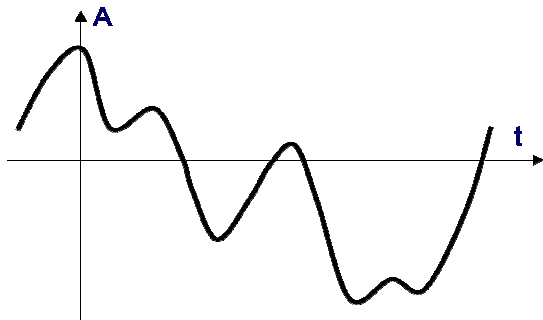
Ahhoz, hogy tárolni tudjuk az analóg jelek által hordozott információt, hogy később analizálhassuk vagy reprodukáljuk, időben mintavételezni és kvantálni kell. A mintavétel során az analóg jelből mintát veszünk adott időközönként, így időben diszkrét mintasorozatot kapunk, amely számsorozat végtelen sok tizedesből áll. A kvantálás során ezen számsorozatokat diszkrétizáljuk, és hozzárendelünk mindegyikhez pl. egy 8 bites bináris kódszót. Ezután már amplitúdóban is diszkrété válnak a minták.

A legfontosabb betartandó szabály a mintavételezési folyamatban a Shannon-tétel, amely kimondja, hogy az  $F_{mv}$  mintavételi frekvencia legalább kétszerese kell, hogy legyen a vizsgált jel sáv szélességének.

$$F_{mv} > 2B$$

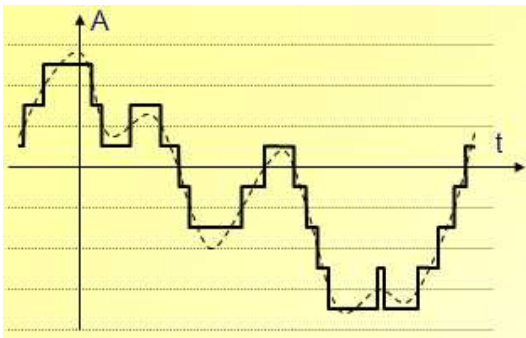
## 2.2. Az analóg és digitális jelek kapcsolata az időtartományban

A mind az amplitúdójuk, mind az idő függvényében folytonosan változó jeleket analóg jeleknek vagy folytonos értékű és folytonos idejű jeleknek nevezzük.



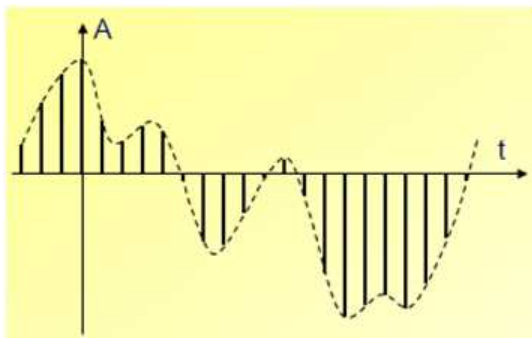
1. ábra: Folytonos értéktartományú és időben folytonos jel

Ha analóg jelet amplitúdó szerint kvantálunk, akkor az amplitúdó értékek ugrásszerűen változnak, s így diszkrét értékű, időben folytonos jelet kapunk.



2. ábra: Diszkrét értékű, időben folytonos jel

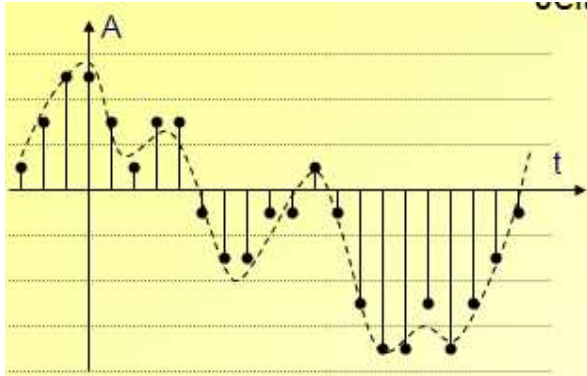
Ha az időben folytonosan változó jelfüggvényből diszkrét időpontokban mintát veszünk, akkor időben szakaszos jelhez jutunk.



3. ábra: Folytonos értékű, diszkrét idejű jel

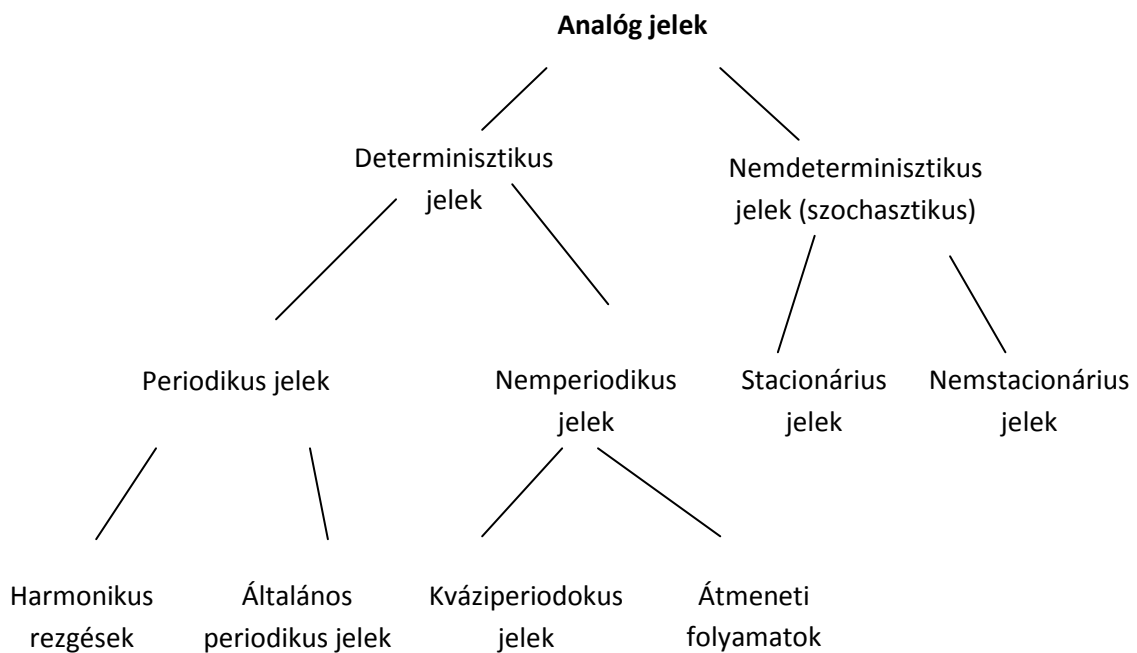
Ha analóg jelből időközönként mintát vesznek, és a jel amplitúdóját is kvantálják, akkor diszkrét értékű és diszkrét idejű jelről van szó. Ilyen jelek az analóg-digitális

átalakító kimenetén észlelhetők, amely az analóg jeleket diszkrét adatok sorává alakítja át. Az átalakítás után a jelsorozatot digitális számítógép dolgozhatja fel. A diszkrét értékű és diszkrét idejű jeleket digitális jeleknek nevezzük.



4. ábra: Diszkrét értékű és időben diszkrét jel

### 2.3 Analóg jelek osztályozása és leírása



5. ábra: Az analóg jelek osztályozása

Az 5. ábrán az analóg jelek különböző osztályokba való lehetséges besorolásának vázlatát látjuk.

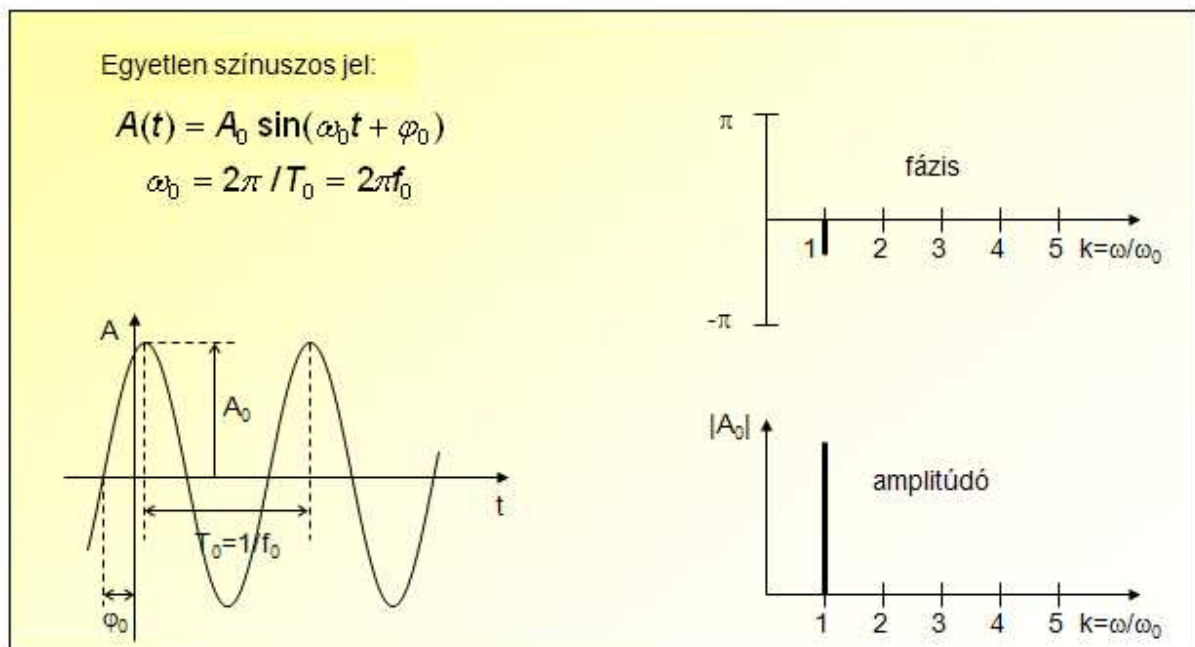
*Determinisztikusnak* nevezünk egy folyamatot akkor, ha értékeinek változása minden tetszőleges időpontra előzetesen megadható, ill. kiszámítható, tehát ennek megfelelően zárt matematikai összefüggéssel leírható.

Ellenkező esetben, ha ez a feltétel nem teljesül, a *nemdeterminisztikus* jelek csoportjáról beszélünk (híradástechnikai szempontból ez az érdekesebb csoport). Ezen jelek értékeinek változását főleg a statisztikai tulajdonságok határozzák meg, ez azonban nem jelenti azt, hogy mindig teljesen szabálytalanul változnak.

A determinisztikus jelek kitüntetett osztályát alkotják a *periodikus jelek*, amelyek *harmonikus rezgésekre* (egyfrekvenciás jelek), valamint *általános periodikus jelekre* oszthatók fel. Ezzel ellentétben léteznek még a *nemperiodikus jelek*, amelyekhez a *kváziperiodikus* és a *tranzienst* (átmeneti) jelek tartoznak.

Hírközlési szempontból a legérdekesebb csoportot a nemdeterminisztikus jelek alkotják, amelyeket – értékváltozásuk véletlen jellege miatt – *sztochasztikus* jeleknek is neveznek.

### 2.3.1 Harmonikus rezgések:



12. ábra: Determinisztikus jelek csoportjába tartozó harmonikus rezgés idő-, és frekvenciatartománybeli jellemzése

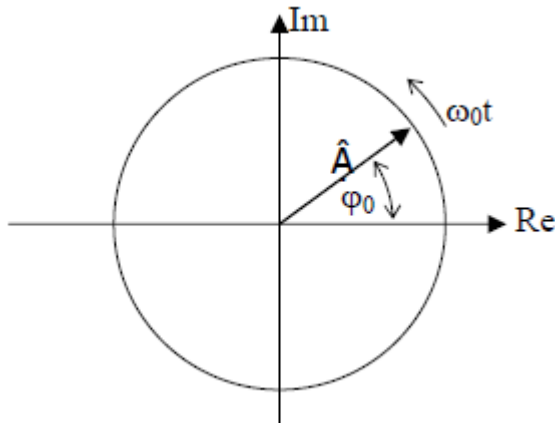


### Jellemzés időtartományban:

A legelterjedtebb módszer a síkvektorok leírására a komplex leírási mód.  
Komplex síkon a jel-időfüggvényt (komplex időfüggvényt) forgó vektorral írjuk le.

### Komplex időfüggvény:

$$\overline{f(t)} = \hat{A}e^{j(\omega_0 t + \varphi_0)}$$



### Jelölések:

$\hat{A}$  a jel amplitúdója,

$\omega_0$  a jel frekvenciája (más elnevezéssel körfrekvencia),

$\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T}$  állandó, ahol  $T$  a periódus idő,  $\varphi_0$  pedig a jel fázis helyzete a  $t = 0$  időpillanatban.

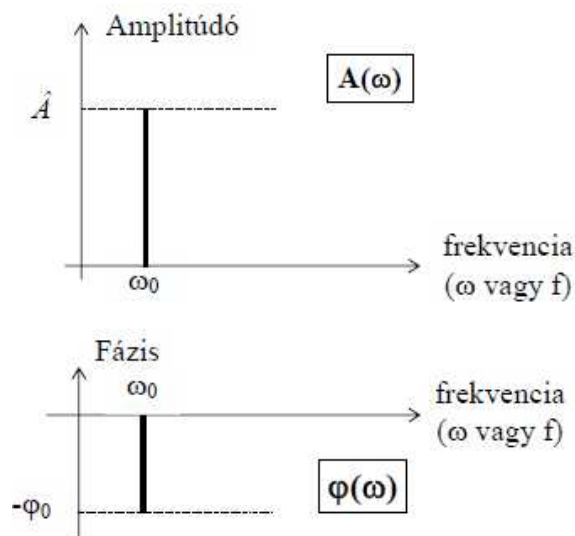
Az  $\overline{f(t)}$  vektor  $\omega_0$  állandó sebességgel forog az óramutató járásával ellentétesen.

$$f(t) = \hat{A} \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

### Jellemzés frekvencia tartományban:

A két időfüggvény értelmezés szerint két frekvencia tartománybeli ábrázolásra van lehetőség.

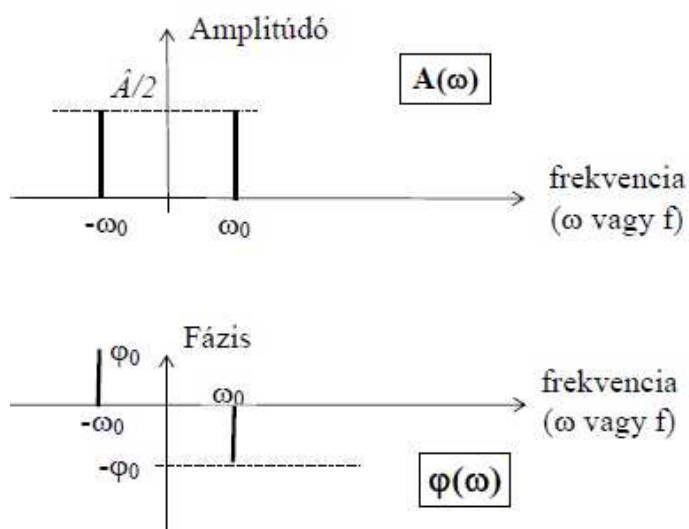
a.) Egyoldalas amplitúdó sűrűség (spektrum)- és fázis-karakterisztika



Ez az ábrázolás a csak pozitív frekvenciákat tartalmazó komplex időfüggvény értelmezésén alapul. A jelben egy frekvencia ( $\omega_0$ ) fordul elő  $\hat{A}$  amplitúdóval és  $\phi_0$  kezdeti fázishelyzettel. A frekvencia tartományban külön ábrázoljuk az amplitúdót (vagy a jel effektív értékét) illetve a fázist a frekvencia függvényében. Gyakran a frekvenciát logaritmikus léptékben ábrázoljuk (nem teszünk különbséget  $\omega$  és  $f$  között, de a  $2\pi$  eltérést mindig figyelembe kell venni) egyrészt azért, hogy a grafikon nagyobb frekvencia tartományt tudjon átfogni.

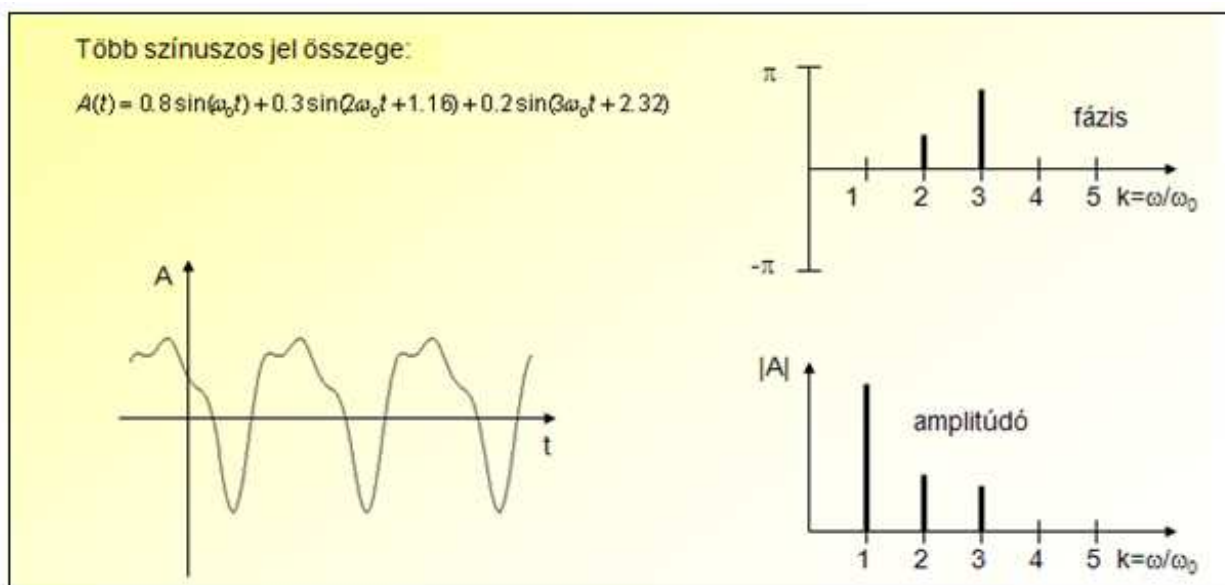
### b) Kétoldalas amplitúdó- és fáziskarakterisztika

A negatív frekvenciákat is tartalmazó komplex időfüggvény értelmezés alapján olyan frekvencia-spektrumot kapunk, amely szimmetrikus a nulla tengelyre. A jelben két frekvencia ( $+\omega_0$  és  $-\omega_0$ ) fordul elő  $\hat{A}/2$  amplitúdóval és  $+\phi_0$ ,  $-\phi_0$  kezdeti fázishelyzettel. A frekvencia tartományban külön ábrázoljuk az amplitúdót (vagy a jel effektív értékét) illetve a fázist a frekvencia függvényében. A frekvenciát csak lineáris léptékben ábrázoljuk.



A két módszer egymással ekvivalens, a logaritmus skála miatt a továbbiakban az egyoldalas frekvencia karakterisztikákat fogjuk használni.

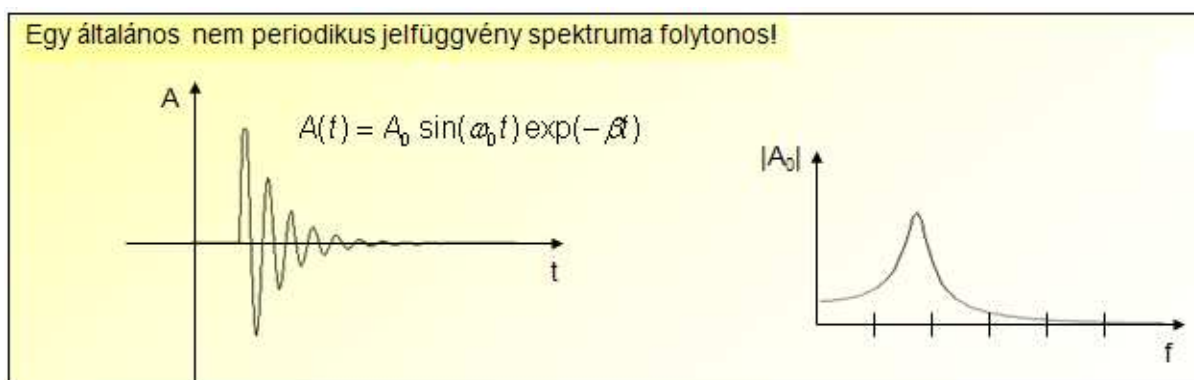
### 2.3.2. Általánosan periodikus jelek:



#### Jellemzés frekvencia tartományban:

Amennyiben az általánosan periodikus jel véges energiájú (meghatározható az effektívértéke), akkor a jel Fourier-sorba fejthető, azaz szinuszos és koszinuszos tagok összegeként előállítható.

### 2.3.3. Kvázi-periodikus jelek:



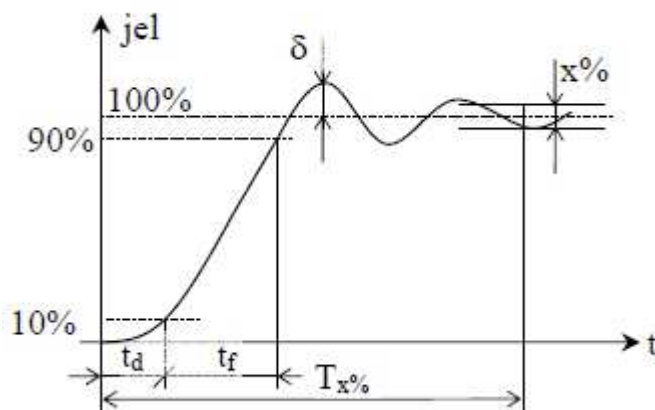
### Jellemzés frekvencia tartományban:

Amennyiben a jel véges energiájú, akkor képezhető a folytonos Fourier-transzformált és kvázi-periodikus jel felírható az alábbi összefüggéssel:

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t)$$

### 2.3.4. Tranziens jelek (átmeneti folyamat):

#### Jellemzés időtartományban:



14. ábra: Tranziens jel időfüggvénye.

Jellemző paraméterek:

$t_d$  (0-10% jelfelfutás között eltelt idő) **késleltetési idő**

$t_f$  **felfutási idő** (10-90% jelfelfutás között eltelt idő)

$T_{x\%}$  **beállási idő** (az az idő ami a kezdettől eltelt addig amíg a csillapodó jel először úgy lép be a megadott  $x$  szélességű sávba, hogy többet nem lép ki onnan)

$\delta$  (a legnagyobb jel értéke a 100 %-os jelhez viszonyítva) **túllövés**

A felfutási időhöz hasonlóan definiálhatjuk a **lefutási időt** ( $T_{le}$  az az idő, ami ahhoz szükséges, hogy a jel a 90% értékről a 10%-ra csökkenjen.)

### **2.3.5 Stacionárius, véletlenszerű jelek**

A nemdeterminisztikus jelek a hírközlés és a mérés technika számára fontos jelentőséggel bír. Az idő függvényében e jelek értékváltozásaiban legtöbbször nem figyelhető meg semmilyen összefüggő folyamat, az értékek nagymértékben a véletlentől függenek. Ezért az ilyen jeleket véletlen jellegű, vagy más néven sztochasztikus jeleknek is szokás nevezni. Az ilyen jellegű folyamatok leírásában, jellemzésében a matematikai statisztikának, ill. valószínűségnek van nagy jelentősége.

#### **Stacionárius folyamat:**

Időbeli folyamatot vagy jelet akkor nevezünk stacionáriusnak, ha jellegzetes statisztikai jelparaméterei, mint pl. a négyzetes vagy a lineáris időbeli középérték, nem függenek attól, hogy milyen időpontban határozták meg őket.

A stacionárius véletlen folyamatok egyik kiemelt csoportját alkotják a zajfolyamatok, amelyek például egyes rendszerek (pl. szűrők) vizsgálójeleként is hasznosíthatók, elsősorban a nemdeterminisztikus jelek frekvenciaspektrumának folytonosságából kiindulva. Továbbá a sztochasztikus jel fázisa véletlenszerűen ingadozik, ezért a komplex spektrum megadásának nincs értelme ebben az esetben, mivel a fázis nem hordoz hasznosítható információt. Ezért egy fázis nélküli függvényt, éspedig a teljesítménysűrűség-spektrumot használunk ezen jelek vizsgálatánál.

Folytonos időfüggvény Fourier-transzformáltjának négyzete:

$$W(\omega) = |F(\omega)|^2 = \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt \right|^2$$

Ha az  $f(t)$  feszültségjel, akkor a  $W(\omega)$  dimenziója  $V^2/Hz$ . Véges sávszélességű rendszerekkel (pl. szűrőkkel) végzett tényleges elemzések során a jelfüggvények teljesítményspektrumát kapjuk, amit el kell még osztanunk az analízis sávszélességével, hogy megkapjuk a  $W(\omega)$ -t.

### **2.3.6 Nemstacionárius jelek**

Azok a jelek, amelyek információt továbbítanak, nem lehetnek stacionáriusak, mert a jelparaméterek időben változnak, ezért az ilyen jellegű jeleket nemstacionáriusnak nevezzük.

Az ilyen jelek matematikai kezelése általában nagyon bonyolult. Azonban a nemdeterminisztikus folyamatok korlátozott időtartamokra nézve gyakran közel stacionárius jellegűek, és így az említett tartományon belül lehetséges a matematika jelvizsgálat. Ezzel a módszerrel feldolgozható jeleket kvázistacionáriusnak szokás nevezni. Ezen jelcsoport jellegzetes képviselői a beszédjelek.

## **3. Analóg jelek digitális elemzése**

Az analóg jelek digitális elemzéséhez szükséges elméleti matematikai alapok megszületése Jean Baptiste Joseph de Fourier francia matematikusnak köszönhető, aki felismerte azt a tényt, hogy a jelek az idő és frekvencia tartományban részletesen jellemezhetők. Egyik tétele szerint minden periodikus függvényt különböző amplitúdó- és fázissúlyozó, harmonikus rezgésre lehet felbontani. Később az elméletet nemperiodikus folyamatokra, valamint a diszkrét idejű és diszkrét értékű jelfüggvényekre is kiterjesztették.

A függvények időtartományból frekvenciatartományba és viszont való átalakítását megvalósító Fourier-sorba fejtés mostanra a digitális jelanalízis egyik alapvető eszközévé vált.

Egy függvény egyik leírási tartományából egy másik leírási tartományba való átalakítást transzformációnak nevezzük.

## 3.1 Periodikus függvények Fourier-sorba fejtése

### 3.1.1 A valós leírású Fourier-sor

Amennyiben az általánosan periodikus jel véges energiájú (meghatározható az effektívértéke), akkor a jel Fourier-sorba fejthető, azaz szinuszos és koszinuszos tagok összegeként előállítható.

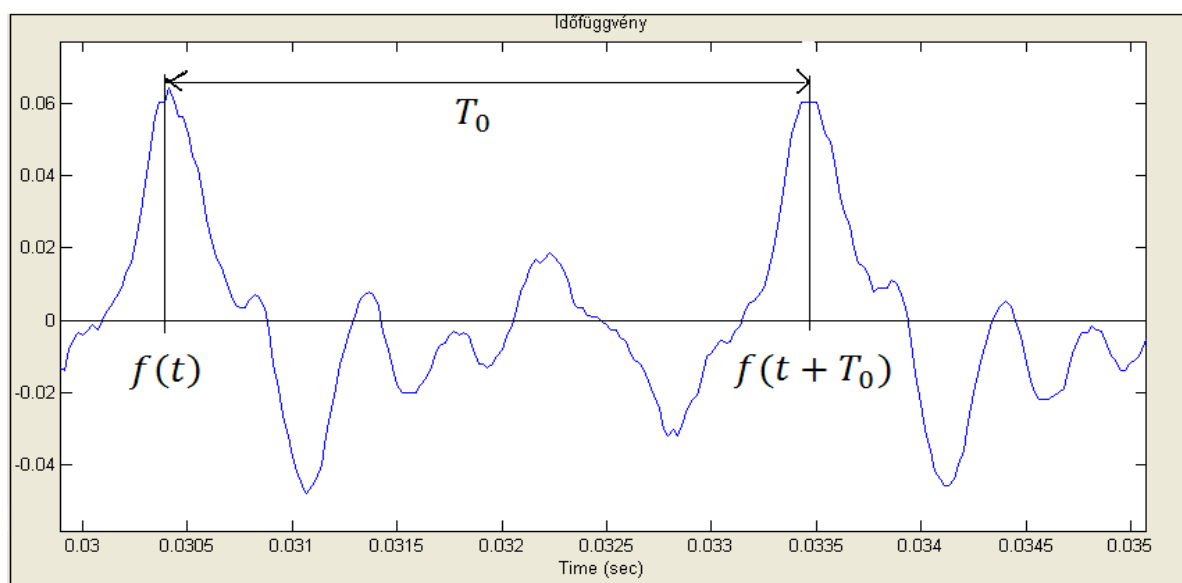
A Fourier-tétel az alábbi alakban írható le:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos(\omega_k t) + \sum_{k=0}^{\infty} b_k \sin(\omega_k t) \quad (3.1)$$

Az egyenletből kiolvasható, hogy az  $f(t)$  időfüggvény felírható szinuszos és koszinuszos jelek összegeként. A (3.2) képletben szereplő feltétel azt mondja ki, hogy az  $f(t)$  egy periodikus időfüggvény:

$$f(t) = f(t + nT_n), \quad n = -\infty \dots + \infty \quad (3.2)$$

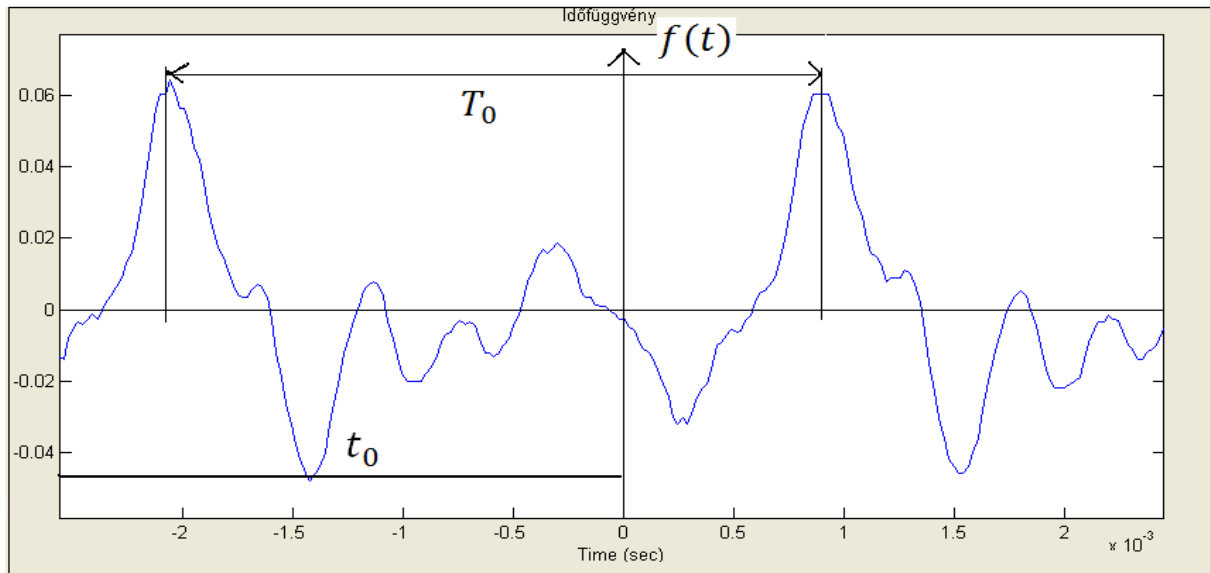
Tehát az  $f(t)$  függvényérték a  $T_0$  periódusidő egész számú többszöröse után megismétlődik, amire a 3.1. ábrán látunk példát. Természetesen minden időfüggő folyamat csak véges időtartományban ismerhető meg.



3.1. ábra: Periodikus időfüggvény

Abból indulunk ki, hogy a vizsgálandó függvény minden időpillanatban már végtelen hosszú ideje létezett és továbbra is végtelen hosszú ideig fenn fog maradni. Ez a komplex ábrázolásánál jelentősen egyszerűbb leírást tesz majd lehetővé.

Negatív időértékeket matematikailag úgy lehet létrehozni, hogy a nullpontot  $t=t_0$  időszakasszal eltoljuk a  $t$  koordináta mentén, ahogy ez a 3.2. ábrán látható.



**3.2. ábra:** Negatív idők létrehozása a viszonyítási időpont eltolásával

Az  $\omega_k$  körfrekvencia definiálásával meghatározhatjuk a  $T_0$  periódusidőt:

$$\omega_k = k\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}k = 2\pi f_0 k \quad (3.3)$$

Az  $f_0 = 1/T_0$  mennyiséget az  $f(t)$  periodikus függvény alaphérfvenciájának nevezzük.

A (3.1) egyenlet által definiált tételt úgy is értelmezhetjük, hogy egy  $f(t)$  periodikus függvény felbontható olyan harmonikus rezgésekre, melyek rezgési hérfvenciája megegyezik az  $f_0$  alaphérfvenciával vagy annak egész számú többszörösével, s így az  $f(t)$  függvény sorba fejthető.

Ebben a sorba fejtésben az egyes diszkrét rezgések amplitúdóit és fázisát az  $a_k$  és  $b_k$  Fourier-együtthatók adják meg.

(Fourier-együtthatók):

$$a_k = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t) \cos(k\omega_0 t) dt, \quad (3.4a)$$



$$b_k = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t) \sin(k\omega_0 t) dt, \quad (3.4b)$$

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t) dt. \quad (3.4c)$$

Az  $a_0$  Fourier-együttható a  $k=0$  értékre vonatkozó, a jelben esetleg jelen levő egyenfeszültségű hányadot adja meg, amely az  $f(t)$  időfüggvény egy  $T_0$  periódusra átlagolt aritmetikai középértékének felel meg.

A (3.1) egyenlet átalakításához használjuk fel az alábbi definíciót:

$$\cos(x + y) = \cos(x) \cos(y) - \sin(x) \sin(y)$$

ahová helyettesítsük be az  $x = k\omega_0 t$  és  $y = \varphi_k$  értékeket:

$$\cos(k\omega_0 t + \varphi_k) = \cos(k\omega_0 t) \cos(\varphi_k) - \sin(k\omega_0 t) \sin(\varphi_k)$$

Szorozzuk be mindkét oldalt  $A_k$ -val:

$$A_k \cos(k\omega_0 t + \varphi_k) = [A_k \cos(\varphi_k)] \cos(k\omega_0 t) - [A_k \sin(\varphi_k)] \sin(k\omega_0 t) ,$$

$$( A_k = \frac{a_k}{\cos(\varphi_k)} = -\frac{b_k}{\sin(\varphi_k)} , \quad A_k \cos(\varphi_k) = a_k , \quad -A_k \sin(\varphi_k) = b_k , )$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos(k\omega_0 t + \varphi_k) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos(\omega_k t) + b_k \sin(\omega_k t)$$

Ha a fenti egyenlet jobb oldala a (3.1) egyenlet szerint megegyezik  $f(t)$ -vel, akkor értelemszerűen a baloldal is meg fog vele egyezni:

$$f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_0 t + \varphi_k), \quad (3.5)$$

$$A_0 = a_0; \quad A_k = \frac{a_k}{\cos\varphi_k} = -\frac{b_k}{\sin\varphi_k},$$

és

$$\varphi_k = \arctan\left(\frac{b_k}{a_k}\right).$$

A periodikus időfüggvény spektrumát az  $\omega_k = k \omega_0$  helyeken  $A_k$  hosszúságú vonalakkal ábrázoljuk. Az ilyen spektrumot ezért vonalas spektrumnak szokás nevezni. A frekvencia-tengelyen két ilyen szomszédos vonal távolsága megadja az alapprofrekvencia értékét és ezzel együtt a jel periódusidejét is.

$$\Delta f = \frac{1}{T_0}, \text{ ill. } \Delta \omega = \frac{2\pi}{T_0}. \quad (3.6)$$

Tehát minél nagyobb a jel  $T_0$  alapperiódusa, ill. minél kisebb a jel  $f_0$  alapprofrekvenciája, annál sűrűbben követik egymást a vonalak.

A páros függvényekre a következő összefüggés érvényes:

$$f(t) = f(-t)$$

Ilyen függvények Fourier-sorában valamennyi  $b_k$  tényező eltűnik. Ezzel szemben valamennyi páratlan függvény esetén, amelyeket az

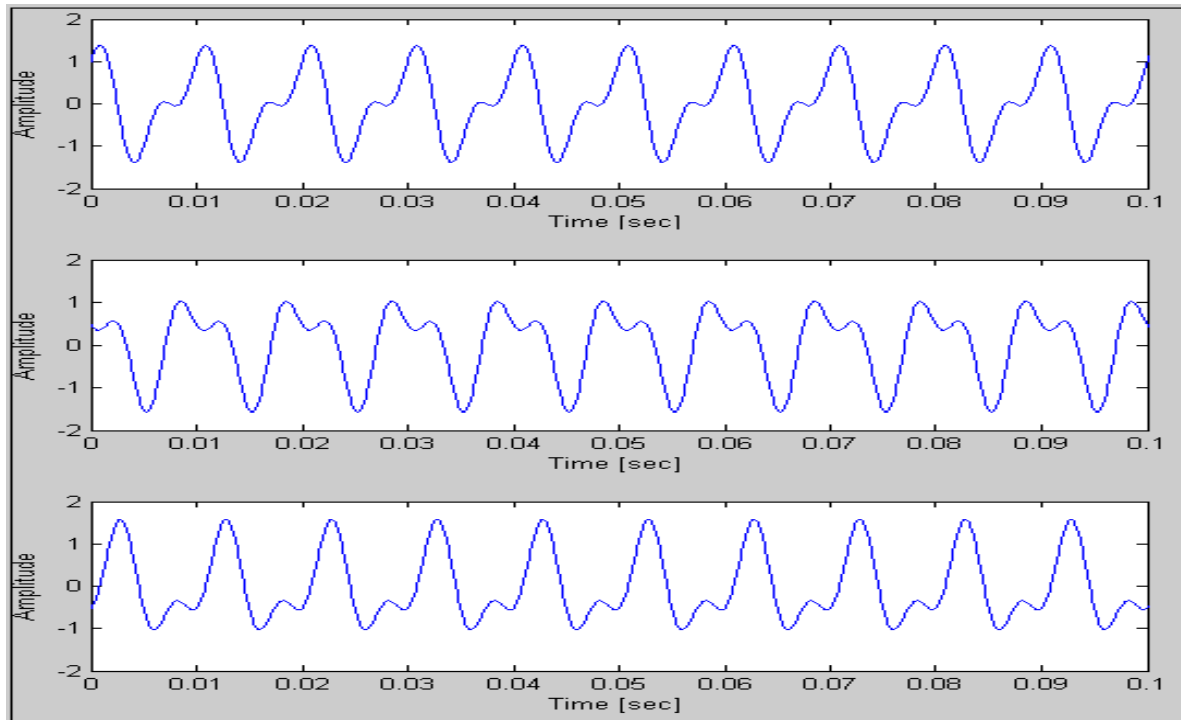
$$f(t) = -f(-t)$$

összefüggés ír le, az  $a_k$  Fourier-együtthatók hiányoznak.

### Összefoglalva néhány alaptétel:

1. Periodikus függvénynek diszkrét frekvenciaspektruma van, amelyet a Fourier-sorba fejtés (3.4 a,b,c) egyenletekben megadott együtthatói írhatnak le.
2. Páros függvényeknél a  $b_k$  együtthatók, páratlan függvényeknél az  $a_k$  együtthatók tűnnek el.
3. Azonos frekvenciák esetén az  $a_k$  és  $b_k$  tényezőket egy  $A_k$  amplitúdóértékké és egy  $\varphi_k$  fázisértékké lehet összefogni, és így minden periodikus függvény diszkrét amplitúdó- és fázisspektrumával jellemezhető.

A 3. pont többek között azt is kimondja, hogy normális esetben az amplitúdóspektrum megadása önmagában nem mond semmit az időfüggvény menetéről. Ez a 3.3. ábra alapján nyilvánvalóvá válik, amelyben egyes  $A_k$  tényezők  $\varphi_k$  fázishelyzetének megváltoztatásával eltérő  $f(t)$  időfüggvényeket lehet létrehozni.



**3.3. ábra:** Különböző fázistolású időfüggvények ábrázolása, ahol  $f(t) = \sin(\omega_0 t + \varphi_0) + 0,6 \sin(2\omega_0 t + \varphi_1)$ , továbbá 1.esetben (legfelül)  $\varphi_0 = 1,57 \text{ rad}$ ,  $\varphi_1 = 0$ , 2.esetben (középen)  $\varphi_0 = 1,57 \text{ rad}$ ,  $\varphi_1 = -2,094 \text{ rad}$ , 3.esetben (legalul)  $\varphi_0 = 0 \text{ rad}$ ,  $\varphi_1 = -2,094 \text{ rad}$

### **3.1.2. A komplex írásmódú Fourier-sor**

Most vizsgáljuk meg a komplex írásmódú Fourier-sort, amely a tétel egyszerűsítése következtében szívesebben használt módszer a jelanalizációs problémák vizsgálatánál.

A komplex szám, amelyet a következőkben mindig aláhúzással jelölünk, egy sík vektoraként ábrázolható. Ezt a síkot a valós és a képzetes tengely határozza meg. A komplex szám  $\underline{a}$  valós és  $\underline{b}$  képzetes része a vektor összetevőinek felelnek meg. Az  $\underline{a}$  és  $\underline{b}$  abszolút értékét a vektornak valós és képzetes tengelyre levetített komponenseinek hossza adja meg, amint az a 3.4. ábrán látható. Ha  $\underline{z}$  egy komplex szám, akkor ennek algebrai alakját a

$$\underline{z} = \underline{a} + j\underline{b} \quad (3.7)$$

és nagyságát az

$$\underline{|z|} = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (3.8)$$

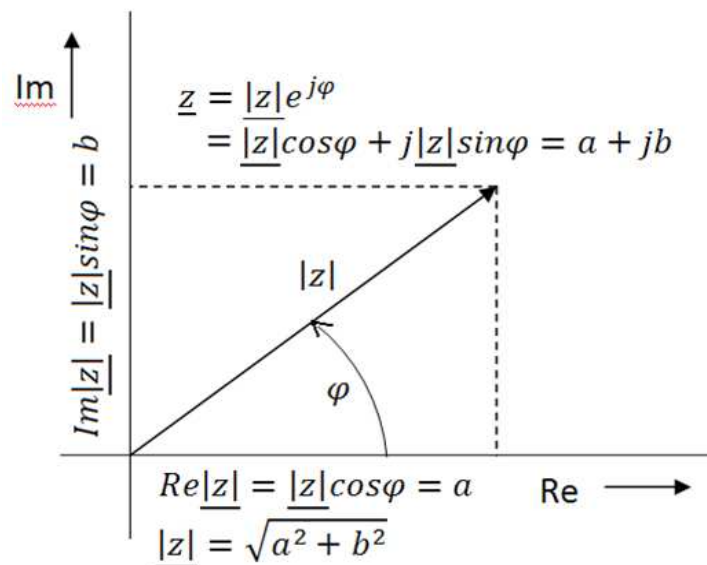
összefüggés adja meg. Ebben az esetben a vektor és a valós tengely pozitív része közötti (az óramutató járásának megfelelő értelemben mért) szöget a

$$\varphi = \text{arc tg} \left\{ \frac{\text{Im}(z)}{\text{Re}(z)} \right\} \quad (3.9)$$

adja meg.

A komplex írásmódot felhasználva, a Fourier-sorba fejtés a következő alakban adható meg:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \underline{C}_k e^{(jk\omega_0 t)} \quad (3.10)$$



3.4. ábra: Komplex szám ábrázolása a számsíkon

Az  $e^{(jk\omega_0 t)}$  tényezőt, valamint a trigonometriai függvényeket a következő összefüggés kapcsolja össze:

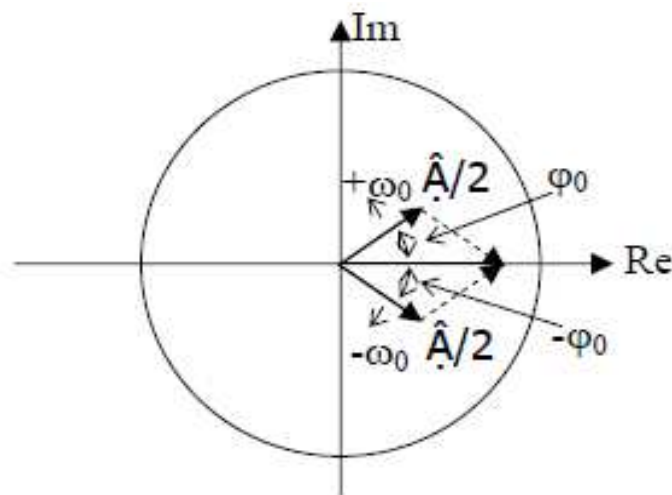
$$e^{(jk\omega_0 t)} = \cos(k\omega_0 t) + j \sin(k\omega_0 t) \quad (3.11)$$

A  $\underline{C}_k$  amplitúdó tényező (egy komplex szám), amely az  $a_0$ ,  $a_k$  és  $b_k$  Fourier-együtthatókat helyettesíti.

A képzetes és a valós rész hányadosa a  $\varphi_k$  fázisszög tangensének felel meg:

$$\tan\varphi_k = \frac{\sin(k\omega_0 t)}{\cos(k\omega_0 t)} \quad (3.12)$$

Annak érdekében, hogy a valós írásmódú Fourier-sornak a (3.5) egyenlet szerinti írásmódjához megteremtsük a kapcsolatot, gondoljunk arra, hogy a levezetett összefüggések alapján egy  $A$  amplitúdójú és  $f_0$  frekvenciájú, valós harmonikus rezgés a komplex síkban két, egymással ellentétes irányban, azonos sebességgel forgó vektorral ábrázolható, amelyek abszolút értéke (hossza) egyenként  $A/2$ , ahogyan ezt a 3.5. ábrán látható.



**3.5. ábra:** Valós harmonikus rezgés ábrázolása a komplex síkban két, fél amplitúdójú és ellentétes forgásirányú vektorral

Ha megfigyeljük a 3.5. ábrát, akkor láthatjuk, amint a két ellentétes irányba mozgó vektor eredője mindig a valós tengelyt fogja kimetszeni.

Egy további jelentős összefüggés:

$$\cos(x) = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2} \quad (3.13)$$

ahol  $x = 2\pi f_0 t + \varphi = \omega_0 t + \varphi$

A (3.13) egyenletet felhasználva láthatjuk, hogy a két vizsgált vektor eredője visszaadja a (3.5) egyenlet szerinti időfüggvényét:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_k}{2} (e^{j(k\omega_0 t + \varphi_k)} + e^{-j(k\omega_0 t + \varphi_k)}) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos(k\omega_0 t + \varphi_k)$$

Ez azt jelenti, hogy a Fourier-sor komplex írásmódja teljesen megegyezik a (3.5) egyenletben bemutatott formával, ha  $f(t)$  valós. Így ez az alak valamennyi jelfüggvényre általánosítható.

Előnyös az is, hogy az  $a_0$ ,  $a_k$  és  $b_k$  Fourier-együtthatókra vonatkozó három egyenlet most egyetlen összefüggésbe fogható össze. Érvényes ugyanis a következő összefüggés:

$$\underline{C}_k = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} f(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \quad (3.14)$$

ahol  $k=0,1,2,3, \dots, \infty$

A (3.14) képletben az  $f(t)$  időfüggvényt periodikus jellegűnek tekintettük. A  $\underline{C}_k$  Fourier-együtthatók ebben az esetben komplexek, azaz van egy valós és egy képzetes részük.

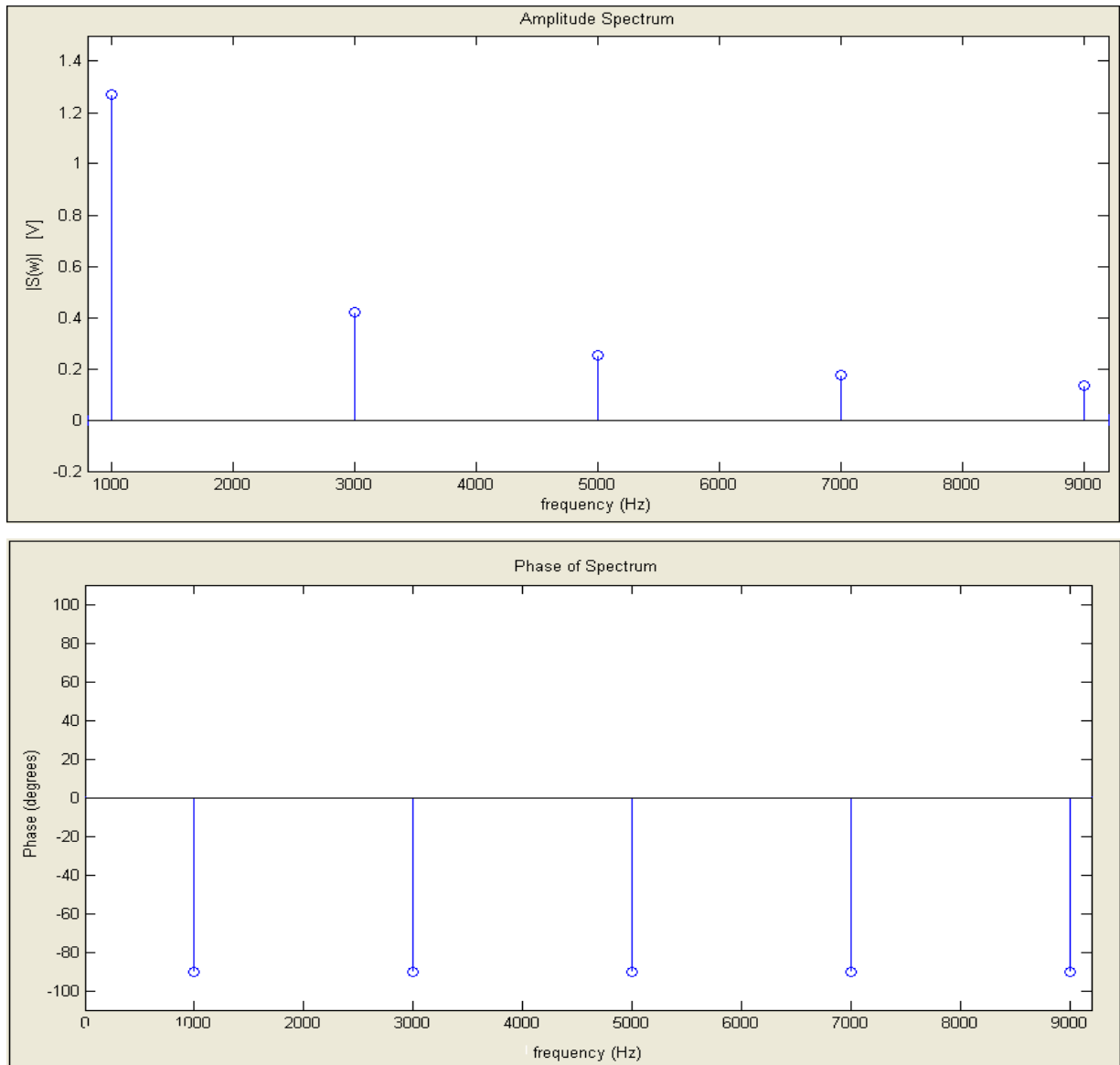
Ezek a valós leírásmódhoz hasonlóan csak a diszkrét  $k\omega_0$  értékeknél, vagyis az alaphfrekvencia egész számú többszöröseinél vannak definiálva.

A következő egyenletekben a  $\underline{C}_k$  komplex együttható, valamint az  $a_k$  és  $b_k$  valós Fourier-együtthatók közötti kapcsolat van megadva:

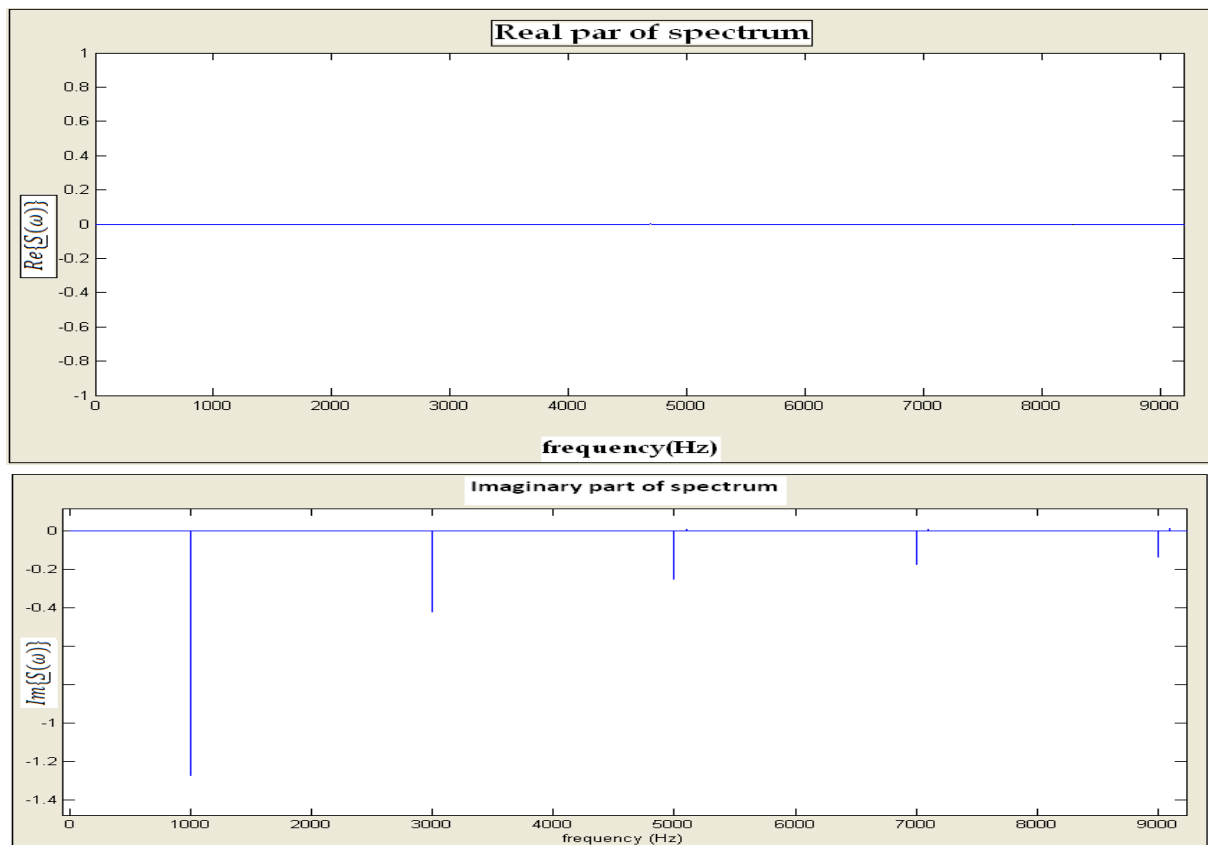
$$\underline{C}_k = \begin{cases} \frac{1}{2}(a_k - jb_k), & \text{ha } k > 0 \\ \frac{1}{2}(a_{|k|} - jb_{|k|}), & \text{ha } k < 0 \\ a_0, & \text{ha } k = 0 \end{cases} \quad (3.15)$$

## Spektrális ábrázolás

A harmonikus rezgések spektrumát kétféleképpen is megadhatjuk a komplex leírásból kiindulva. A frekvencia függvényében ábrázolhatjuk a valós és képzetes részt, vagy az abszolút értéket és fázist.



**3.6. ábra:** Egy periodikus négyszögjel diszkrét spektrumfüggvényének abszolút értéke (felül) és fázisa (alul)



**3.7. ábra:** A 3.6. ábrán bemutatott periodikus négyszögjel diszkrét spektrumfüggvényének valós(felül) és képzetes(alul) része

## **3.2. Nemperiodikus jelek Fourier-analízise**

Az eddig tárgyalt időtartományból frekvenciatartományba és vissza való átalakításoknál feltételeztük, hogy az analizált teljes jelfolyamat periodikus. Most a Fourier-tételt kibővítjük a nemperiodikus jelekre is, amely a digitális jelanalízisben fontos szerepet játszó diszkrét Fourier-transzformációs algoritmus alapja.

### **3.2.1 A Fourier-integrál**

A periodikus jelekről a nemperiodikus jelekre való áttérést úgy lehet elvégezni, hogy az általános periodikus jel  $T_0$  periódusidejét a végtelenhez közelítjük. Mivel a diszkrét spektrumban a spektrumvonalak egymás közti távolsága a periódusidővel fordítva arányos, ez azt jelenti, hogy  $\Delta f$  nullához tart és végül eltűnik, azaz

$$\Delta f \rightarrow 0, \text{ ha } T_0 \rightarrow \infty$$



Így tehát a vonalas spektrum helyett folytonos spektrum jön létre, vagyis a vonalak távolsága olyan kicsire csökken, hogy a spektrum már nem bontható fel diszkrét vonalakra. Ebben az esetben a (3.10) képletben szereplő összeg integrállá alakul át, hiszen az integrál nem más, mint a végtelen kicsi  $\Delta f$  tartományokra vett függvényértékek összege. Ezen a módon jutunk el a Fourier-tétel integrálalakjához. A sorfejtés esetéhez hasonlóan ismét két képlet létezik, amelyek a különböző tartományokban található jeleket összekapcsoljuk egymással:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (3.16)$$

és

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (3.17)$$

A (3.17) képletben az  $F(\omega)$  a folytonos spektrális függvény, amely a periodikus függvény sorfejtésében eredetileg szereplő diszkrét  $C_k$  amplitúdó-együtthatóknak felel meg. Ez komplex mennyiség, és ezért valós és képzetes részre, vagy fázis- és amplitúdó-függvényre bontható fel:

$$\underline{F}(\omega) = \text{Re}(\underline{F}(\omega)) + j\{\underline{F}(\omega)\} = R(\omega) + jX(\omega), \quad (3.18)$$

$$\varphi(\omega) = \text{arc tg} \left\{ \frac{X(\omega)}{R(\omega)} \right\}, \quad (3.19)$$

$$|\underline{F}(\omega)| = \sqrt{R^2(\omega) + X^2(\omega)}. \quad (3.20)$$

Az  $F(\omega)$  függvényt általában az  $f(t)$  időfüggvény Fourier-transzformáltjának szokás nevezni.

Minden  $f(t)$  nemperiodikus folyamatnak van Fourier-transzformáltja, amelyről elmondható, hogy az

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt$$

integrál értéke véges értékhez tart.

Az  $F(\omega)$  most már az összes frekvenciára vonatkozó amplitúdó- és fázisinformációt tartalmazza. Ennek előfeltétele az, hogy az integrálást végtelen hosszú időre végezzük el.

*Néhány alaptétel összefoglalva:*

- A nemperiodikus jeleknek folytonos frekvenciaspektruma van, amelyet az

$$\underline{F}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$$

ír le, amennyiben az  $F(\omega)$  transzformált létezik.

- Az  $F(\omega)$  spektrum általában komplex. A spektrumot valós és képzetes részével, vagy érték- és fázisfüggvénnyel lehet a frekvencia függvényében ábrázolni.
- Ha  $F(\omega)$  ismert, akkor a hozzá tartozó  $f(t)$  időfüggvényt az inverz Fourier-transzformáció

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \underline{F}(\omega)e^{j\omega t} dt$$

kifejezés alkalmazásával lehet helyreállítani.

- Ha  $f(t)$  páros függvény, akkor  $\underline{F}(\omega)$  szintén páros, és csak valós része van.
- Ha  $f(t)$  páratlan függvény, akkor  $\underline{F}(\omega)$  páratlan, és csak képzetes része van.
- Az  $\underline{F}(\omega)$  valós része mindig páros, képzetes része mindig páratlan függvény.

### **3.3 Mintavételezett jelek analízise**

A számítógéppel való jelelemzéshez szükséges az analóg jelek digitalizálására. Első lépésben mintát veszünk a jelekből azonos időközönként, majd ezt az amplitúdó értéket diszkrétizálni kell, azaz kvantálni, a végeredményt pedig tárolni. Eszerint az eljárás szerint véges méretű, diszkrét adatszavak keletkeznek, azaz a jelfüggvények most már időben és értékben egyaránt diszkrét formában állnak rendelkezésünkre.

### 3.3.1. Mintavételezett jelek Fourier-transzformáltja

A mintavételezett jelekre a (3.17) egyenlet szerinti Fourier-transzformáció közvetlenül nem alkalmazható, mivel a végtelen kis mintavételi tartományokat előíró követelmény nem valósítható meg. Mivel a további számításokhoz csak a  $t_m$  diszkrét időpillanatokban vett mintavételezett jelek állnak rendelkezésre, az eredetileg folytonos  $t$  változót a (3.21) képlet szerint diszkrét változóval helyettesítik, és az integrál helyett diszkrét összeget alkalmaznak.

$$t_n = n\Delta t \quad -\infty \leq n \leq \infty \quad (3.21)$$

Ekkor a (6.21) egyenlet a következőképpen módosul:

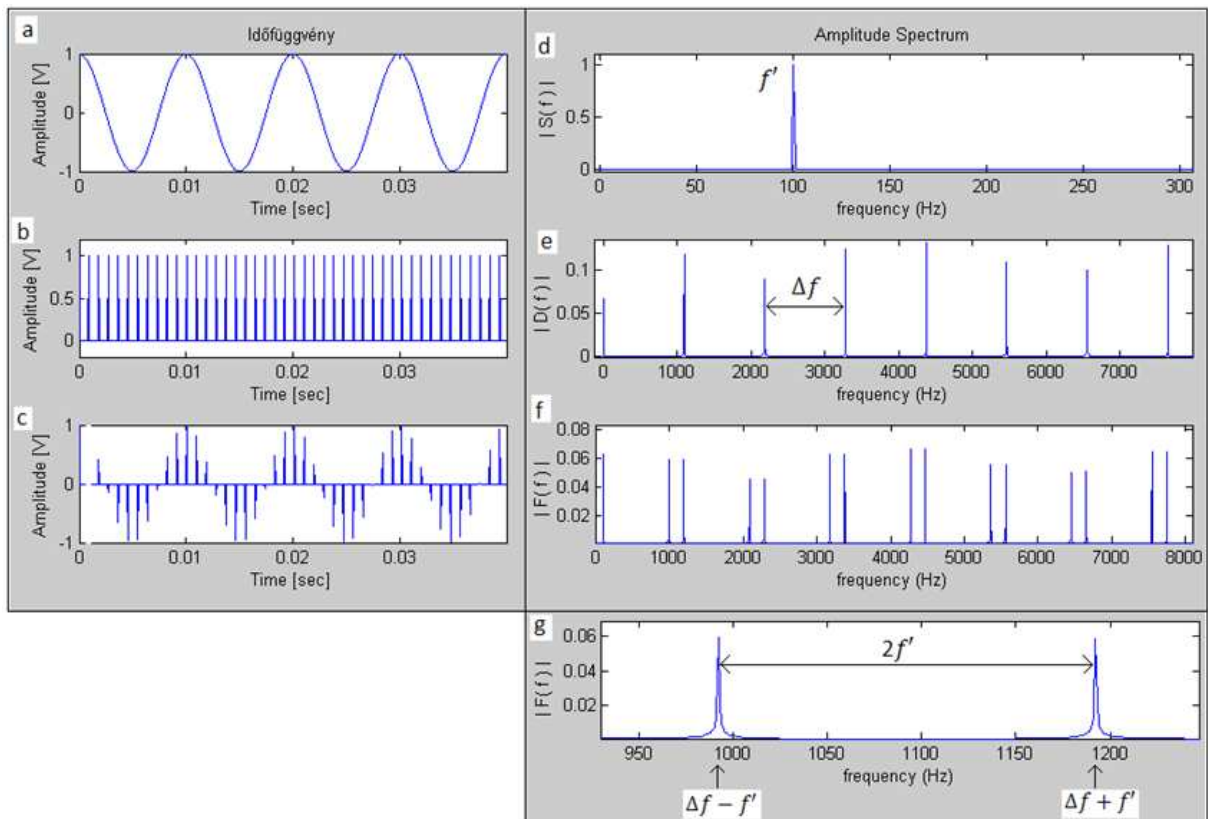
$$\underline{F}'(\omega) = \Delta t \sum_{-\infty}^{+\infty} f(n\Delta t) e^{j2\pi f n \Delta t} \quad (3.22)$$

$\underline{F}'(\omega)$  a mintavételezett jel Fourier-transzformáltja

A (3.17) egyenletben szereplő  $\underline{F}(\omega)$  kifejezéssel szemben a (3.22) egyenletben az  $\underline{F}'(\omega)$   $\omega$ -ban periodikus, azaz az  $\underline{F}'(\omega)$  spektrum  $\Omega=2\pi/\Delta t$  frekvenciával periodikusan ismétlődik:

$$\underline{F}'(\omega) = \underline{F}'(\omega + n\Omega) \quad -\infty < n < \infty \quad (3.23)$$

Az  $s(t)$  folytonos függvény, valamint az egymástól  $\Delta t$  távolságban lévő  $\delta(t)$  tűimpulzusok végtelen sorozatának szorzata során változó amplitúdójú tűimpulzus-sorozat keletkezik, mely impulzusok közti távolság  $\Delta t = \frac{1}{\Delta f}$  értékkel fog megegyezni (3.8a,b,c ábrák). Az egyes Fourier-transzformált  $\underline{S}(\omega)$  és  $\underline{D}(\omega)$  függvényeket a 3.8 d) és e) ábrák mutatják. Láthatjuk, hogy a tűimpulzus-sorozat Fourier-transzformáltja ismét tűimpulzusok sorozata, amelyek egymás közti távolsága  $1/\Delta t$ .



**3.8. ábra:** Periodikus spektrum előállítása a jelfüggvény mintavételezésével

**a)** harmonikus rezgés; **b)** tűimpulzus-sorozat; **c)** mintavételezett függvény;  
**d)** harmonikus jel (egyoldalas) spektruma; **e)** a tűimpulzus-sorozat (egyoldalas) spektruma; **f)** a c) pontban látható PCM jel Fourier-transzformációval előállított egyoldalas spektruma; **g)** az f) pontban látható spektrum kinagyított részlete.

A 3.8. ábra **e** és **f**, ill. 3.9. ábra **b** és **c** részében a tűimpulzus sorozat és a mintavételezett jel spektrumában az amplitúdók nagyságának különbözősége a később ismertetésre kerülő ablakolás nem kívánt eredménye.

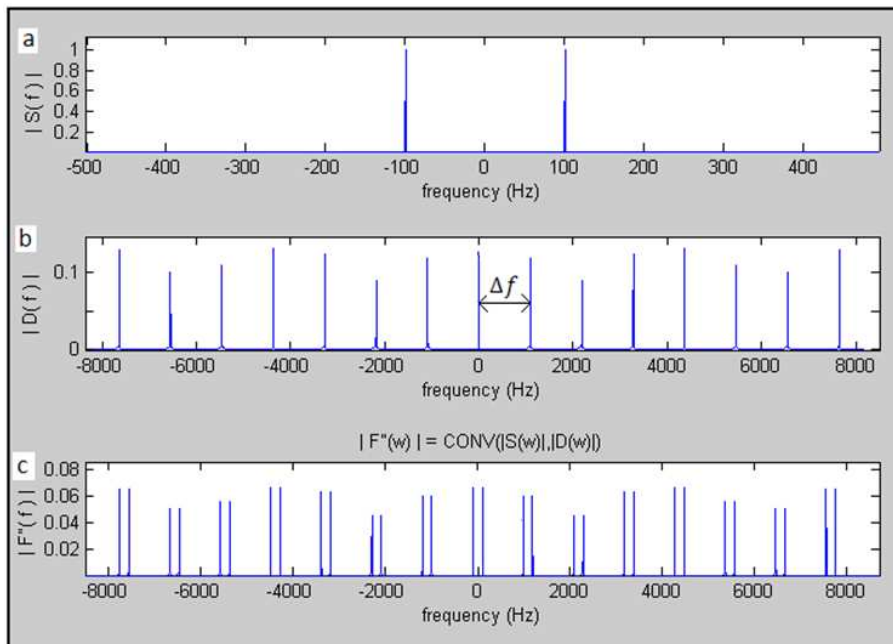
A Fourier-transzformáció egy alapvető tétele, a konvolúciós tétel azt mondja ki, hogy két, egymással multiplikatív módon összekapcsolt függvény transzformáltja egyenlő az egyes függvények transzformáltjainak konvolúciójával.

Az előző állításnak az igazolására nézzünk meg egy példát:

MATLAB program segítségével hozzunk létre egy  $x = \sin(2\pi * 100 * t + 1.57)$  periodikus függvényt (3.8a ábra), továbbá egy impulzussorozatot (3.8b ábra), melynek bármely két egymást követő impulzusa között eltelt idő,  $\Delta t = \frac{1}{1092} \text{ sec}$ . A mintavételi frekvenciát a  $\Delta t$  határozza meg, tehát  $\Delta f = \frac{1}{\Delta t} = 1092 \text{ Hz}$ . Az impulzussorozat spektrumában (3.8e ábra) a  $\Delta f$  és annak egész számú többszöröseinél láthatunk nullától eltérő amplitúdó értéket.

A 3.8c ábra szerinti mintavételezett (PCM) jel spektrumában a  $k * \Delta f \pm f'$  frekvenciahelyeken látunk kiemelkedést, ahol  $k$  az egész számok halmazának eleme,  $f'$  pedig az  $x$  jel alappfrekvenciája. Ugyanerre az eredményre jutunk akkor is, ha 3.9a és 3.9b ábra szerinti páros  $|S(\omega)|$  és  $|D(\omega)|$  spektrumokat konvolváljuk és az eredményként kapott páros spektrumot kirajzoljuk.

A példa során a konvolúciós szorzásnál fontos, hogy páros spektrumokat konvolváljunk, hogy a helyes eredményre jussunk!



**3.9. ábra:** (Kétoldalas) Periodikus spektrum előállítása

**a)** 3.8. ábrán bemutatott harmonikus rezgés kétoldalas spektruma

**b)** 3.8. ábrán bemutatott tűimpulzus-sorozat kétoldalas spektruma

**c)** az a és b pont szerinti spektrumok konvolúciója, melynek eredménye egy kétoldalas periodikus spektrum.

A konvolúciót csillaggal (\*) szokás jelölni:

$$\underline{F}(\omega) = \underline{S}(\omega) * \underline{D}(\omega) \quad (3.24)$$

A (4.28)-as egyenlet az alábbi konvolúciós integrál rövidített alakjának felel meg:

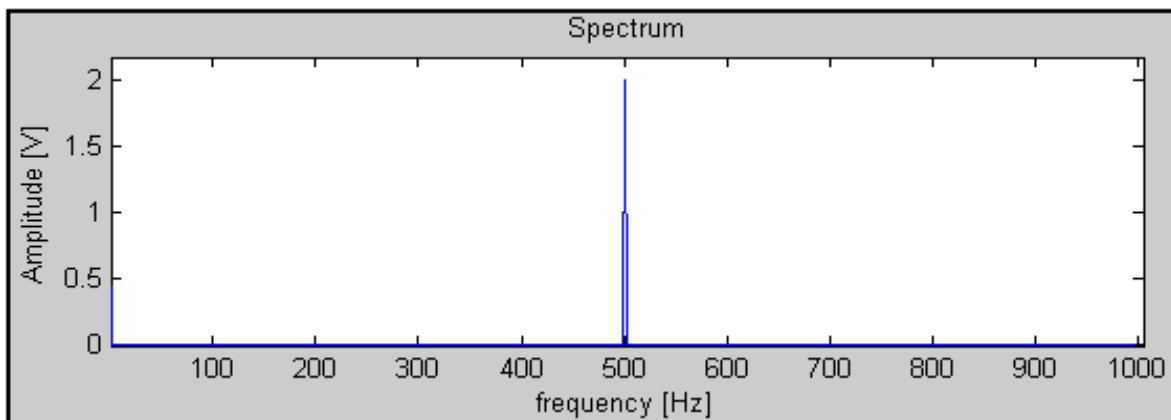
$$\underline{F}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \underline{S}(\omega) \underline{D}(\omega - \omega') d\omega' \quad (3.25)$$

A 3.9. c) ábrán (a vízszintes tengely nem  $\omega$ , hanem  $f = \omega/2\pi$  szerint van skálázva!) látható a konvolúciós művelet eredménye és az, hogy az  $\underline{S}(f)$  spektrum  $\Delta f$  frekvenciával periodikusan ismétlődik.

Ahhoz, hogy az időben és értékben folytonos jelet időbeni mintavételezett értékekből hibátlanul helyreállíthassuk, az  $f_m$  mintavételi frekvenciát a jelben előforduló legnagyobb frekvencia kétszeresénél nagyobbra kell megválasztani (Shannon-tétel).

$$f_m = \Delta f = \frac{1}{\Delta t} > 2f_{max} \quad (3.26)$$

Ellenkező esetben a spektrumban úgynevezett alias-frekvenciák lépnek fel, amire a 3.10-es ábra mutat egy példát.



**3.10. ábra:** Alias-frekvencia megjelenése a spektrumban 500 Hz-nél Shannon-tétel be nem tartása következtében. A transzformálandó jelünk  $x = 2 * \sin(2 * \pi * 1500 * t)$ , mely harmonikus rezgés alaphfrekvenciája  $f_0=1500$  Hz. A mintavételi frekvencia  $F_s = 2000$  Hz.

Ha az időben folytonos jelet a mintavételezést megelőzve egy aluláteresztő szűrőnek vetjük alá, és csak ezután diszkrétizáljuk és analizáljuk azt, akkor ezzel a későbbiekben elkerüljük a hibás eredmények keletkezését.

Az emberi fül érzékenységére való tekintettel, a hanghullámok vizsgálatához az aluláteresztő szűrő vágási frekvenciáját legfeljebb 22100 Hz-re célszerű tervezni. Az ilyen szűrőket antialiasing szűrőknek is szokás nevezni.

### **3.3.2. Diszkrét Fourier-transzformáció (DFT)**

Egy analóg jelet  $T$  időtartamon belül  $\Delta t$  időközönként mintavételezve  $N$  minta keletkezik az alábbi egyenlet szerint:

$$N = \frac{T}{\Delta t} \quad (3.27)$$

A jel  $T$  szakaszának hosszúságát megfigyelési időnek vagy ablakszélességnek nevezzük.

A Fourier-tételnek a véges analizálási idejű és mintájú, időben diszkrét jelekre való kiterjesztését a következő egyenlet adja meg:

$$\underline{F}(\omega_M) = \Delta t \sum_{k=-N/2}^{(N/2)-1} f(n\Delta t) e^{-jM\Delta\omega_M t} \quad (3.28)$$

amit diszkrét Fourier-transzformációnak (DFT) nevezzük. A (3.28) egyenletben az eredetileg folytonos  $\omega$  változót egy diszkrét  $\omega_M$  változó váltotta fel. A Fourier-transzformált számításánál a véges számú mintavételi értékre korlátozás következtében az eredetileg folytonos spektrumot már csak véges számú, egymástól független, diszkrét frekvenciaértékre lehet kiszámítani. Tehát a diszkrét frekvenciaértékek (3.29) képletben megadott diszkrét értékeken vannak definiálva:

$$\omega_M = M\Delta\omega, \quad \text{ill.} \quad f_M = M\Delta f \quad (3.29)$$

A DFT összetevők  $\Delta\omega$  távolsága fordítva arányos a  $T$  ablakszélességgel:

$$\Delta\omega = \frac{2\pi}{T} \quad (3.30)$$

$$\Delta\omega = \frac{2\pi}{N\Delta t} \quad (3.31)$$

Ha a (3.31) egyenletet beillesztjük a (3.28) egyenletbe, és az  $\underline{F}(M\Delta\omega)$  helyett csak  $\underline{F}(M)$ , továbbá  $f(n\Delta t)$  helyett csak  $f(n)$  kifejezést írunk, akkor a következőt kapjuk:

$$\underline{F}(M) = \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} f(n) e^{-j2\pi Mn/N} \quad (3.32)$$

Fontos figyelembe venni azt, hogy N számú mintavételi értékből N számú spektrális értéket kiszámolva, annak csak N/2 spektrális összetevője lesz független egymástól! Az  $(N/2)\Delta\omega$  frekvenciától kezdve a spektrumértékek ismétlődnek, továbbá ebben a tartományban a képzetes rész értékeinek előjele megváltozik, azaz a komplex amplitúdóspektrum itt a konjugált komplex értékekből adódik.

A (3.32) egyenlet szerinti diszkrét Fourier-transzformáció inverze, az inverz diszkrét Fourier-transzformáció (IDFT) a következőképpen van definiálva:

$$f(n) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \underline{F}(m) e^{\frac{j2\pi mn}{N}} \quad (3.33)$$

Figyelembe kell venni azt, hogy a visszatranszformálásához valamennyi N összetevőre szükség van.

Tekintsünk meg egy egyszerű példát a DFT algoritmusra:

Képzeljünk el egy 8 kHz sáv szélességű spektrumot, amit N számú egyenlő részre osztunk fel. Ha tehát N=8, akkor 8 darab, egyenként 1 kHz széles tartományt hoztunk létre. A DFT kimenete, az  $X_k$  jelképezi a jel energiáját minden egyes ilyen szakaszban. DFT és IDFT egyenletek gyakran használt alakja:

$$\text{DFT(idő --> frekvencia)} F_k = \sum_{i=0}^{N-1} f_i e^{-\frac{j2\pi ki}{N}}$$

ahol  $k = \{0, \dots, N - 1\}$



$$\text{IDFT(frekvencia } \rightarrow \text{ idő)} f_i = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F_k e^{+ \frac{j2\pi ki}{N}}$$

ahol  $i = \{0, \dots, N - 1\}$

Válasszuk meg az  $N$  értékét 8-ra. Legyen az időtartománybeli jelünk 8 mintája  $\{1,1,1,1,1,1,1,1\}$ , azaz csupa egyes. Ebben a példában azt várjuk, hogy egyedül a null frekvenciában lesz nullától eltérő értékünk, amelyet a jel DC (egyenfeszültségű) komponensének is nevezhetjük.

$$F_k = \sum_{i=0}^{N-1} f_i e^{j2\pi ki/N}$$

$$F_0 = \sum_{i=0}^7 1 * e^0 = 8$$

$$F_1 = \sum_{i=0}^7 1 * e^{j2\pi i/N} =$$

$$\begin{aligned} &= e^0 + e^{\frac{j2\pi}{8}} + e^{\frac{j2\pi 2}{8}} + e^{\frac{j2\pi 3}{8}} + e^{\frac{j2\pi 4}{8}} + e^{\frac{j2\pi 5}{8}} + e^{\frac{j2\pi 6}{8}} + e^{\frac{j2\pi 7}{8}} \\ &= 1 + (0.7071 + j0.7071) + j + (-0.7071 - j0.7071) - 1 \\ &\quad + (-0.7071 + j0.7071) - j + (0.7071 - j0.7071) = 0 \end{aligned}$$

$$F_2 = \sum_{i=0}^7 1 * e^{j2\pi i^2/N} =$$

$$\begin{aligned} &= e^0 + e^{j2\pi 2/8} + e^{j2\pi 4/8} + e^{j2\pi 6/8} + e^{j2\pi 8/8} + e^{j2\pi 10/8} + e^{j2\pi 12/8} + e^{j2\pi 14/8} \\ &= 1 + j - 1 - j + 1 + j - 1 - j = 0 \end{aligned}$$

$$F_3 = \sum_{i=0}^7 1 * e^{j2\pi i^3/N} =$$

$$\begin{aligned} &= e^0 + e^{j2\pi 3/8} + e^{j2\pi 6/8} + e^{j2\pi 9/8} + e^{j2\pi 12/8} + e^{j2\pi 15/8} + e^{j2\pi 18/8} + e^{j2\pi 21/8} \\ &= 1 + (-0.7071 + j0.7071) - 1 + (0.7071 + j0.7071) - 1 + (0.7071 - j0.7071) \\ &\quad + 1 + (-0.7071 - j0.7071) = 0 \end{aligned}$$

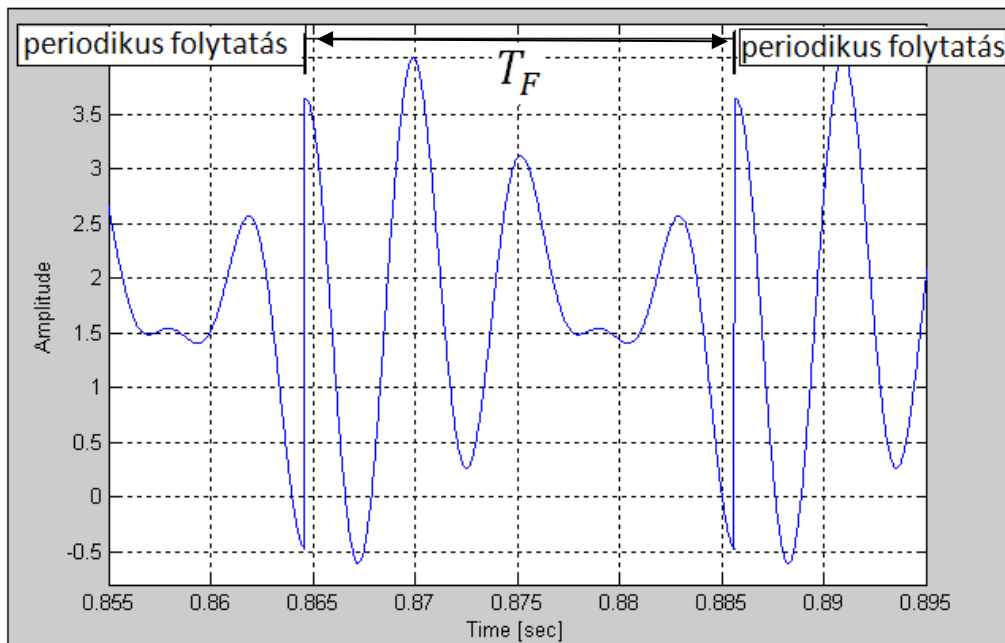
$F_4; F_5; F_6; F_7$  értékek mindegyike az előző számításokhoz hasonlóan nulla.

### 3.3.3 Időben korlátozott jelek analízise

A diszkrét Fourier-transzformáció feltételezi, hogy az időben korlátozott, mintavételezett függvény periodikus, továbbá azt is, hogy az analizálandó jelnek pontosan egy periódusa, vagy annak egész számú többszöröse esik bele az úgynevezett időablak által meghatározott  $S_F(t)$  időszakaszba.

$$S_F(t) = S_F(t + nT_F) \quad -\infty < n < \infty \quad (3.34)$$

Legtöbbször a (3.34) egyenlet szerinti feltétel nem teljesül, s így a jelfüggvény menetében szakadások keletkeznek (ahogyan azt a 3.11. ábra szemlélteti).



**3.11. ábra:** Időben korlátozott jelfüggvény periodikus folytatása

Ha a mintavételezett függvények Fourier-transzformáltjára vonatkozó (3.22) egyenletbe az eredetileg folytonos  $f(t)$  időfüggvény  $f'(n)$  mintavételi értékei helyett egy módosított  $f'(t) = f(t)w(t)$  időfüggvényt helyettesítünk be, akkor belátható annak spektrumra gyakorolt hatása:

$$\underline{F}'(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n)w(n)e^{-\frac{j2\pi mn}{N}} \quad (3.35)$$

Az időtartományban egymással multiplikatív módon összekapcsolt függvények transzformáltja a frekvenciatartományban az egyes függvények transzformáltjainak konvolúciójával egyezik meg (Fourier-transzformációs tétel) :

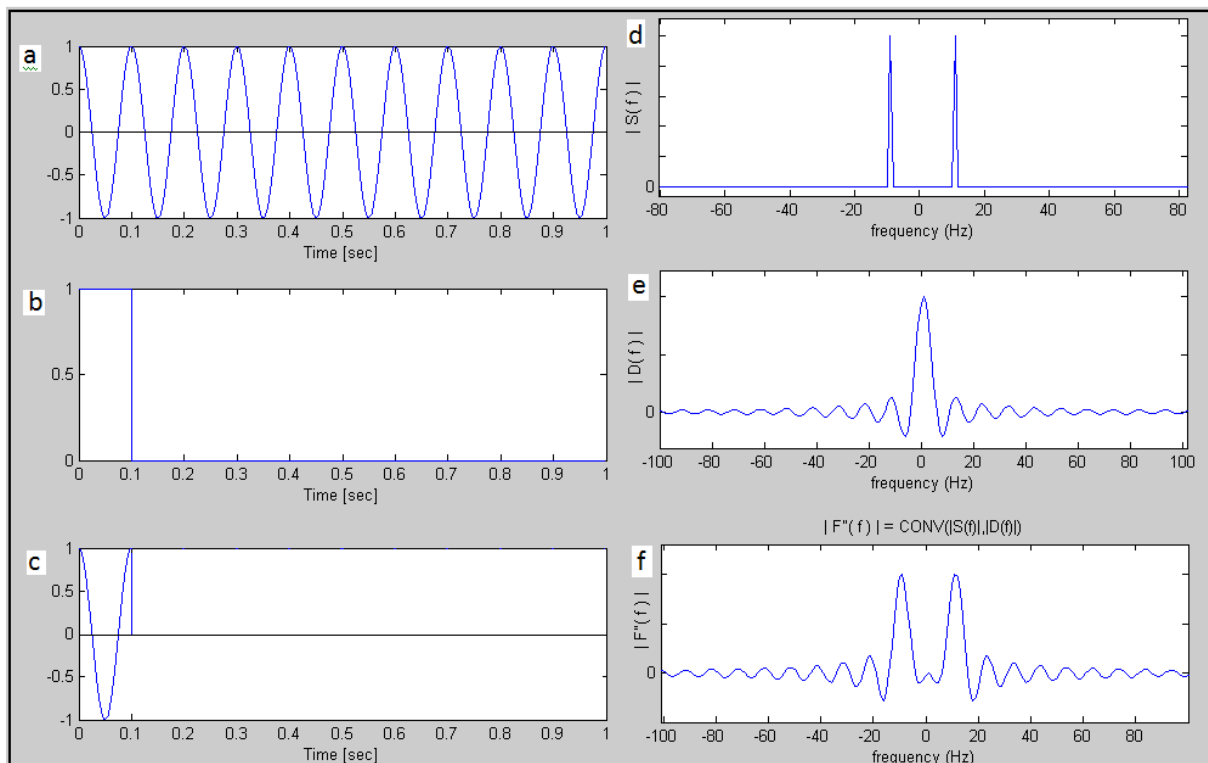
$$\underline{F}'(\omega) = \underline{F}(\omega) * \underline{W}(\omega) \quad (3.36)$$

ill.

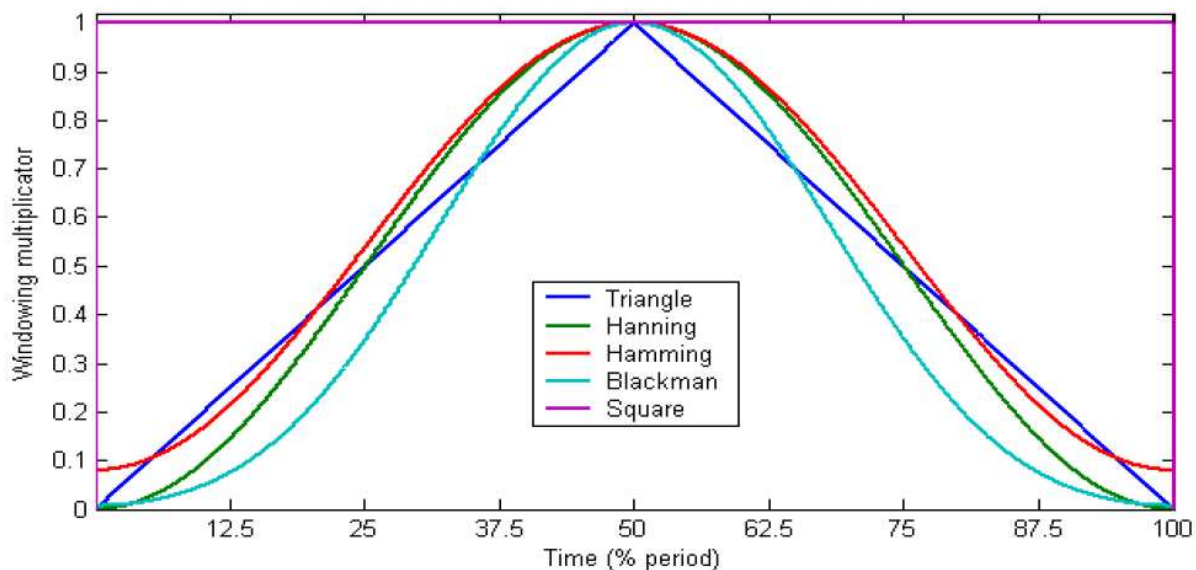
$$\underline{F}'(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \underline{F}(\omega) \underline{W}(\omega - \omega') d\omega' \quad (3.37)$$

$\underline{F}(\omega)$  az  $f(t)$  jel Fourier-transzformáltja, továbbá  $\underline{W}(\omega)$  a  $w(t)$  időablak Fourier-transzformáltja.

A 3.12. ábrán jól látható, hogy miként hat a  $w(t)$  időablak függvényének  $\underline{W}(\omega)$  transzformáltja a konvolúcióból számított  $\underline{F}'(\omega)$  függvényre.



**3.12. ábra:** **a)** Harmonikus rezgés időfüggvénye; **b)** derékszögű ablak időfüggvénye; **c)** az ablakon átvezetett jelfüggvény; **d)** az a) jel spektruma; **e)** az ablak spektruma; **f)** a c) jel spektruma



3.13. ábra: Elterjedt ablakolási megoldások személtetése.

3.1. táblázat: Néhány népszerű ablakfüggvény összehasonlítása:

Ablakfüggvény	A legnagyobb melléknyaláb, dB	A melléknyalábok csökkenési sebessége, dB/oktáv	Ekvivalens zajsáv szélesség	-3dB-es határ	Maximális mintavételi hiba, dB
Derékszögű (Square)	-13	-6	$1 \Delta f$	$0,89 \Delta f$	3,92
Háromszög (Triangle)	-27	-12	$1,33 \Delta f$	$1,28 \Delta f$	1,82
Hann	-32	-18	$1,50 \Delta f$	$1,44 \Delta f$	1,42
Hamming	43	-6	$1,36 \Delta f$	$1,30 \Delta f$	1,78
Blackman	-58	-18	$1,73 \Delta f$	$1,68 \Delta f$	1,10

Érdekességképpen vizsgáljuk meg azt az esetet, amikor az időablak  $T_F$  szélessége az analizált jel  $T_0$  periódusidejének pontosan egész számú többszöröse. Ebben az esetben – és csakis ekkor – az  $\underline{W}(\omega)$  spektrumfüggvény maximumai egybeesnek az alapharmonikusokhoz és ennek felharmonikusaihoz tartozó spektrumvonalakkal és a diszkrét Fourier-transzformáció valamennyi, nem az  $f_0$  értékkel vagy annak többszöröseivel megegyező spektrális komponense a nullhelyekre esik, tehát a spektrumban nem jelenik meg. Ekkor az időben nem korlátozott jelekre jellemző spektrumot kapunk.

Ez az eset általában nem lép fel, és így az ablakfüggvények nem kívánatos hatásai legtöbbször megmutatkoznak. Az analízis eredménye nagymértékben függ attól, hogy a diszkrét Fourier-transzformáció diszkrét komponensei az ablak spektrális függvényét mely pontokon tapogatják le.

### **3.3.4 Gyors diszkrét Fourier-transzformáció (FFT)**

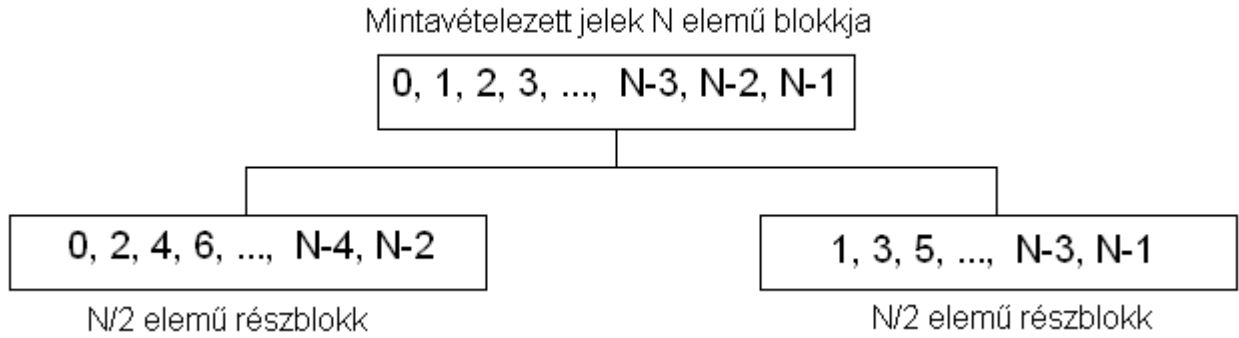
A teljes DFT transzformáció meghatározásához  $N$  minta esetén a (3.32) egyenletből kiindulva összesen  $N^2$  számú szorzási és összeadási műveletre van szükség. Ez azt jelenti, hogy  $N$  növekedésével a számítási idő jelentősen megnő. Pontosán ennek a hátránynak a kiküszöbölésére találták ki a FFT-t és az IFFT-t.

Az előtranszformálásnál a spektrumértékek  $M = \frac{N}{2} - 1$  fölötti redundanciája következtében az értékek fele elegendő lenne, azonban ez például a visszatranszformálásnál nem érvényes, mert az általános esetben komplex  $N$  spektrális érték mindegyikére szükség van ahhoz, hogy az időtartományban ismét  $N$  számú mintánk legyen.

A gyors Fourier-transzformáció (FFT) a diszkrét Fourier-transzformáció (DFT) időhatékony számítására alkalmas. Mindkét esetben a számszerű eredmény megegyezik.

Az FFT algoritmus levezetésénél fontos szerepet játszik a (3.32) egyenlet komplex exponenciális tényezőjében meglévő redundanciának, amely megengedi a jelfüggvény mintavételezési tételének kisebb részekre való felbontását, és ezekre a részekre a DFT külön-külön való alkalmazását.

A helyzet akkor a legegyszerűbb és legáttekinthetőbb, ha a jelfüggvény mintáinak számát (az  $N$  blokkméretet) kettő hatványaként választjuk meg, vagyis ha  $N = 2^w$ . Ennek az a következménye, hogy az adatrész-készletet kettővel folyamatosan végzett osztásokkal kisebb blokkokra lehet felbontani, amelyekre külön-külön el lehet végezni a diszkrét Fourier-transzformációs műveletet. A 3.14. ábrán egy  $N$  kiterjedésű, teljes mintablokk két részblokkra történő felbontását láthatjuk.



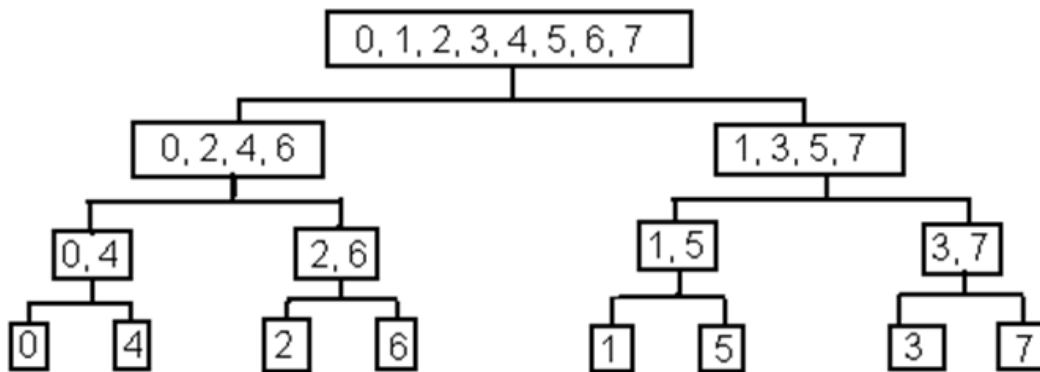
**3.14. ábra:**  $N$  terjedelmű, mintavételezett adatsor felbontása két, egyenként  $N/2$  terjedelmű részblokkra

Az első blokk az  $n = 0$  értéktől az  $N - 2$  értékig, a második pedig  $n = 1$ -től  $N - 1$  értékig terjed, vagyis az első részblokk valamennyi  $f(2n)$  páros mintavételi értéket, a második valamennyi  $f(2n + 1)$  páratlan mintavételi értéket tartalmazza. A (3.32) egyenletnek megfelelő diszkrét Fourier-transzformáció átírható a következő alakba:

$$\underline{F}(M) = \Delta t \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} f(2n) e^{-\frac{j4\pi Mn}{N}} + e^{-\frac{j2\pi M}{N}} + \Delta t \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} f(2n + 1) e^{-\frac{j4\pi Mn}{N}} \quad (3.38)$$

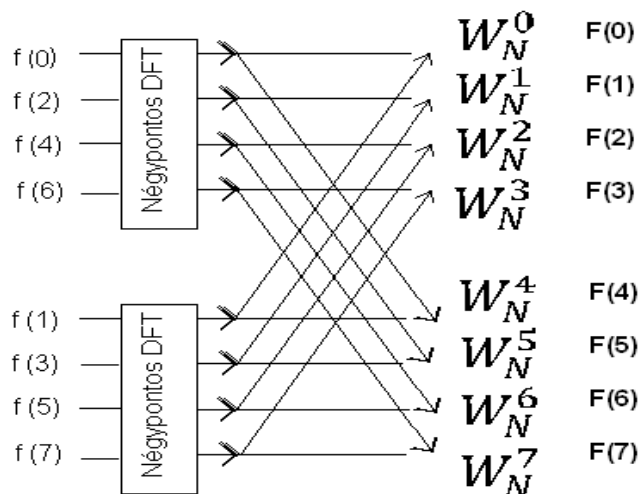
vagyis az eredeti diszkrét Fourier-transzformált felosztható két, a fél blokkra kiterjedő diszkrét Fourier-transzformált lineáris kombinációjára. Míg a diszkrét Fourier-transzformáció (3.32) egyenlet szerinti elvégzéséhez  $N^2$  számú komplex szorzási műveletre van szükség, a most bemutatott esetben mindössze  $2(N/2)^2 + N$  számú szorzási műveletre van szükség. (Az összeg második tagjára azért van szükség, mert a második diszkrét Fourier-transzformált részt az  $\exp(-j2\pi M/N)$  fáziskorrektív tényezővel is meg kell szorozni.) A felbontási művelettel nyilvánvalóan jelentősen csökkenteni lehet a diszkrét Fourier-transzformáció elvégzéséhez szükséges szorzási műveletek számát. Ez jelentős időmegtakarítást tesz lehetővé a (3.32) egyenlet szerint, hagyományos diszkrét Fourier-transzformációval szemben.

A mintavételezett adatblokk felosztásának folyamata tovább folytatható, amíg el nem érjük a teljes felbontást, amint ezt a 3.15. ábrán egy  $N = 8$  terjedelmű adatblokk transzformációjának példáján szemléltetve van.



3.15. ábra:  $N=8$  terjedelmű, mintavételezett adatsor teljes felbontása

A 3.16. ábrán az áttekinthetőség kedvéért az  $\exp(-j4\pi M/N)$  exponenciális függvények a  $W_N^M$  komplex tényezőkkel lettek helyettesítve.



$$W_N = e^{-j\pi/4}$$

3.16. ábra: Gyors Fourier-transzformáció diagramja a mintavételezett adatsor idő szerinti felbontásával

Az exponenciális tagok periodicitása által képviselt redundancia további kiküszöbölése lehetővé teszi, hogy a diszkrét Fourier-transzformált kiszámításához  $N^2$  számú helyett már csak  $2N \log_2 N$  számú komplex szorzásra van szükség. A 3.17. ábrán szemléletesen látható a gyors Fourier-transzformáció alkalmazásával elérhető megtakarítás.

N	DFT $N^2$ Complex Multiplication and Addition Operations	FFT $N \cdot \log_2 N$ Complex Multiplication and Addition Operations	Computational Effort of FFT Compared to DFT (%)
8	64	24	37.50
32	1024	160	15.62
256	65,536	2048	3.12
1024	1,048,576	10,240	0.98
4096	16,777,216	49,152	0.29

**3.17. ábra:** Szorzási és összeadási műveletek száma  $N$  függvényében DFT és FFT esetén, és az ebből számított hatékonysági ráta százalékban.

Most pedig lássunk egy példát a spektrum meghatározására (FFT segítségével) és ábrázolására MATLAB alatt:

Ebben a példában a mintavételi frekvencia  $F_m = 44000 \text{ Hz}$ , amely a Shannon-tétel szerint meghatározza az egyoldalas amplitúdó-spektrum maximális sávszélességét 22000 Hz-re. A mintavételi idő a mintavételi frekvencia reciproka, azaz megközelítőleg  $2,2675 \cdot 10^{-5} \text{ sec}$ . Az  $[x = 2 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot 1000 \cdot t) + 0.5 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot 500 \cdot t)]$  egyenlet egy időben és amplitúdóban diszkrét periodikus jelet ír le, melynek periódusidejét az  $f_0 = 500 \text{ Hz}$  alapprofrekvencia határozza meg, tehát  $T_0 = \frac{1}{f_0} = 0.002 \text{ sec}$ . A bemenő jelsorozat mintaszáma, melyet következő lépésként FFT-nek vetjük alá, 176-ra lett megválasztva. Tehát a jel teljes hossza  $t = 176 \cdot T_m = 0.004 \text{ sec}$ , ahol  $T_m$  a mintavételi idő. Ebből az következik, hogy ez a 176 db minta pont 2 periódusnyi jelet ábrázol.

Ha az imént részletezett jelet  $N$ -nel megegyező,  $nfft = 176$  pontos FFT-nek vetjük alá, akkor a kimeneten 176 darab komplex értékünk lesz. Ebből az első 88 minta megadja a 22000 Hz sávszélességű diszkrét egyoldalas spektrum mintáit. Az eddigiekből meghatározható, hogy mely frekvenciákhoz rendeljük az FFT első 88 mintáját:

$$f_k = \frac{F_m}{nfft} * S_k$$

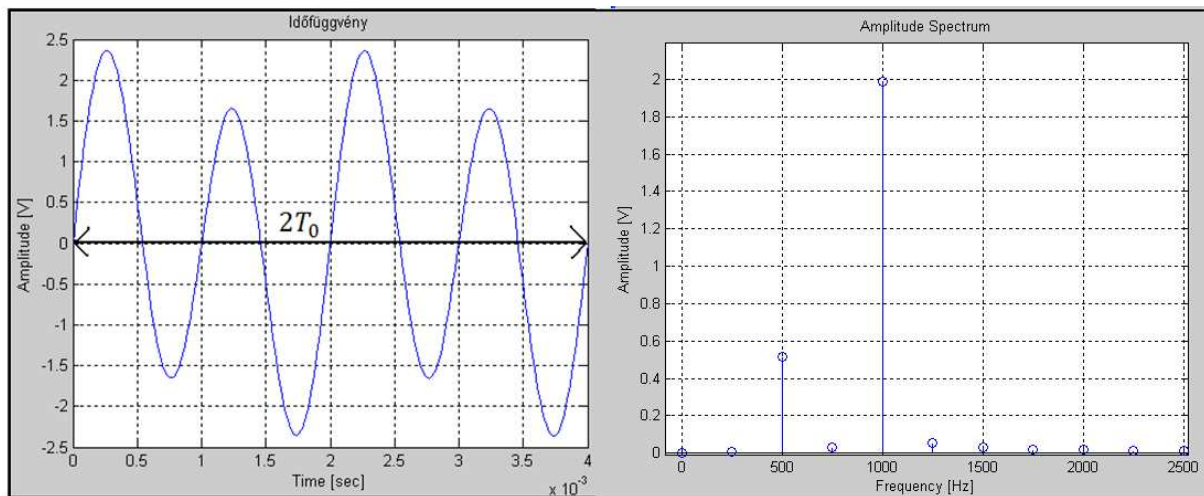
ahol  $k = 1,2,3, \dots \left(\frac{nfft}{2}\right)$ ,

$$S_k = 0,1,2,3, \dots \left(\frac{nfft}{2} - 1\right)$$

Tehát a példánk szerint  $f_k = 0 \text{ Hz}; 250; 2 \cdot 250 \text{ Hz}; \dots 21750 \text{ Hz}$  frekvenciákon lesz egy-egy diszkrét érték.



A 3.18. ábra segítségével meggyőződhetünk róla, hogy a vizsgált jel spektruma 250 Hz-enként vesz fel egy-egy értéket.



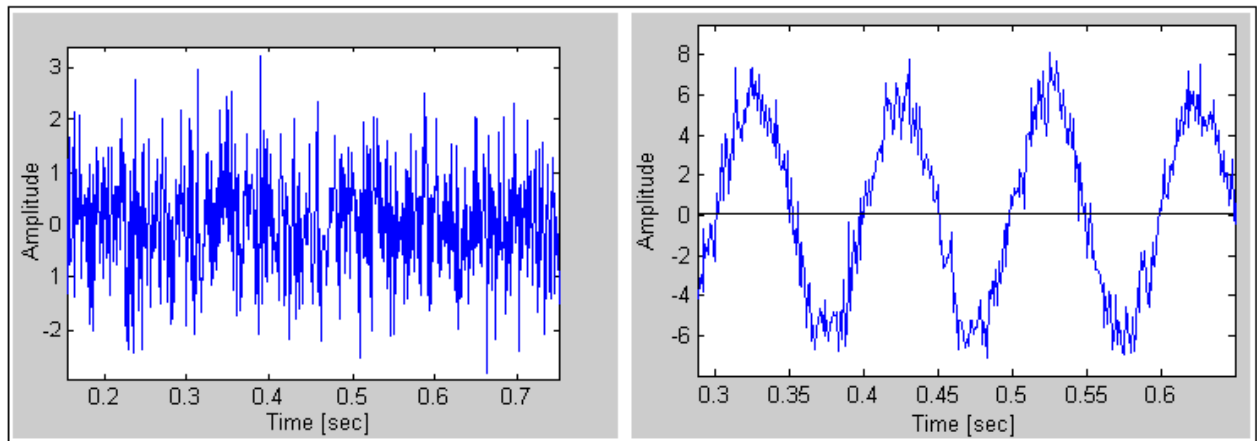
**3.18. ábra:** Egy periodikus jel időfüggvénye és diszkrét spektruma

## **4. Statisztikus folyamatok analízise**

Ebben a fejezetben, az ezt megelőző résznek a determinisztikus jelek vizsgálatából származó ismeretekre támaszkodva megvizsgálunk néhány, a nemdeterminisztikus jelek osztályára jellemző kiegészítő analízis módszert.

### **4.1. A teljesítménysűrűség-spektrum**

A véletlenszerű (sztochasztikus) jeleknek két, gyakorlati szempontból fontos csoportja van. Ezek a tiszta véletlenszerű jelek és a vegyes jelfolyamatok csoportja. Az utóbbi jeltípus nemdeterminisztikus folyamat mellett determinisztikus jelfolyamatokat is tartalmaznak, amire a 4.1. ábrán látunk példát.



**4.1.ábra:** (baloldal) Véletlenszerű sztochasztikus jel (Fehérzaj); (jobboldal) zajjal terhelt harmonikus rezgés

A sztochasztikus jelek egyik jellegzetessége a folytonos frekvenciaspektrum, továbbá a spektrum fázisának statisztikus ingadozása. Ebből az következik, hogy az ilyen jelet fázis nélküli függvénnyel, mégpedig a teljesítménysűrűség-spektrummal érdemes jellemezni. Ezt teljesítményspektrumnak, vagy auto-teljesítményspektrumnak is szokás nevezni. Ennek definíciója a következő két egyenértékű egyenlet szerint van megadva:

$$W(\omega) = \underline{F}(\omega)\underline{F}^*(\omega) , \quad (4.1a)$$

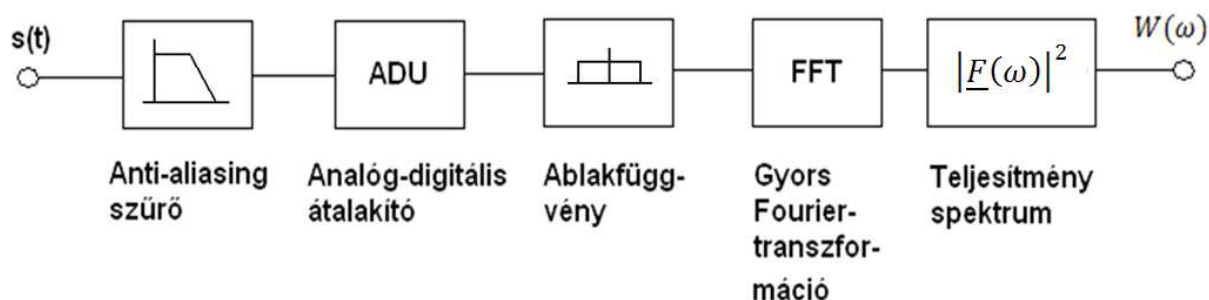
$$W(\omega) = [F_R(\omega) + jF_I(\omega)][F_R(\omega) - jF_I(\omega)] = F_R^2(\omega) + F_I^2(\omega) , \quad (4.1b)$$

ahol az  $\underline{F}(\omega)$  Fourier-transzformált valós részét  $F_R(\omega)$ , képzetes részét  $F_I(\omega)$  jelöli,  $\underline{F}^*(\omega)$  pedig az  $\underline{F}(\omega)$  konjugáltja.

A (4.1b) egyenletet exponenciális alakra átírva a következő eredményt kapjuk:

$$W(\omega) = |\underline{F}(\omega)|e^{j\varphi} |\underline{F}(\omega)|e^{-j\varphi} = |\underline{F}(\omega)|^2 \quad (4.1c)$$

ahol  $|\underline{F}(\omega)| = \sqrt{F_R^2(\omega) + F_I^2(\omega)}$ .



4.2.ábra: A teljesítményspektrum meghatározása

A diszkrét Fourier-transzformációs művelet során egy  $V^2$  dimenziójú teljesítményspektrumot határozzunk meg, amit még el kell osztani az analízis sávszélességével, azaz  $\Delta\omega = 2\pi/(N\Delta t)$  értékkel, ami két egymást követő DFT-s összetevő közti frekvenciakülönbségnek felel meg.

## 4.2. Az autokorreláció-függvény

A legtöbb véletlen folyamatnak nagyon sokszor felismerhető belső statisztikai szerkezete van. Ebből az következik, hogy a jel létrejötte nem teljesen szabálytalan folyamat eredménye, s így az időtartományban egy jel szomszédos függvényértékei egymástól már nem függetlenek, azaz korreláltak, aminek a mértékét az alábbi, autokorreláció-függvényre vonatkozó egyenlet definiálja:

$$\Phi(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t)f(t + \tau)dt \quad (4.2)$$

$\tau = 0$  esetén az (4.2). egyenlet a vizsgált jelfolyamat teljesítményét adja meg:

$$\Phi(0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f^2(t)dt = \overline{f^2(t)} \quad (4.3.)$$

$\tau = \infty$  esetében viszont az autokorreláció-függvény a jelfüggvény lineáris középértékének négyzetéhez tart:

$$\Phi(\infty) = [\overline{f(t)}]^2 \quad (4.4)$$

### 4.3. Korrelációs analízis digitális rendszerekkel

A mintavételezett diszkrét jelértékek autokorreláció-függvényét az alábbi összefüggés határozza meg:

$$\Phi(m\Delta t) \approx \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N f(n\Delta t)f\{(n+m)\Delta t\} \quad (4.5)$$

A  $\Delta t$  értékét a Shannon-féle mintavételi tétel alapján természetesen úgy kell megválasztani, hogy az (4.5.) egyenlet kiértékelésének legyen értelme. Ennek egy másik kiszámítási módszere a Wiener és Hincsin tétele alapján történik (4.6. ábra). Ez lehetővé teszi az autokorreláció-, és keresztkorreláció-függvény teljesítménysűrűség-spektrumból történő kiszámítását. Ennek az a nagy előnye, hogy a számításokhoz a gyorsalgoritmusokat használjuk, ezzel jelentősen megrövidítve a számítási időt.

A Wiener-Hincsin-tétel szerint egy jel autokorreláció-függvénye és teljesítménysűrűség-spektruma kölcsönösen egy Fourier-transzformációs párt alkot, hasonlóan, mint az időfüggvény és az amplitúdóspektrum. A tételek a

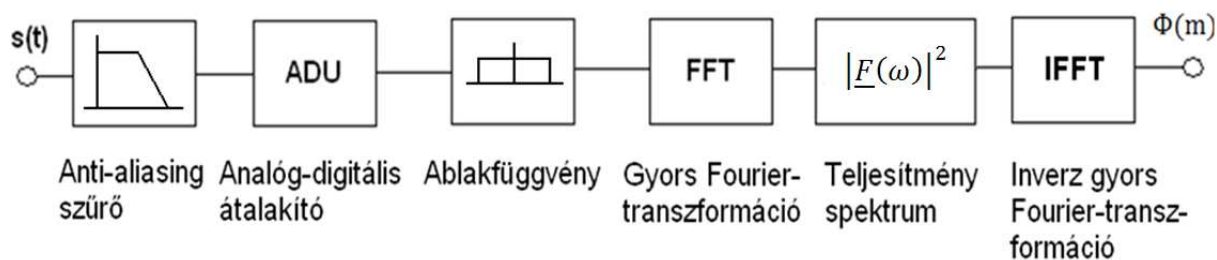
$$W(m) = F\{\Phi(n)\} = \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} \Phi(n)e^{-j2\pi mn/N} \quad (4.6a)$$

és

$$\Phi(n) = F^{-1}\{W(m)\} = \frac{1}{N\Delta t} \sum_{m=0}^{N-1} W(m)e^{-\frac{j2\pi mn}{N}} \quad (4.6b)$$

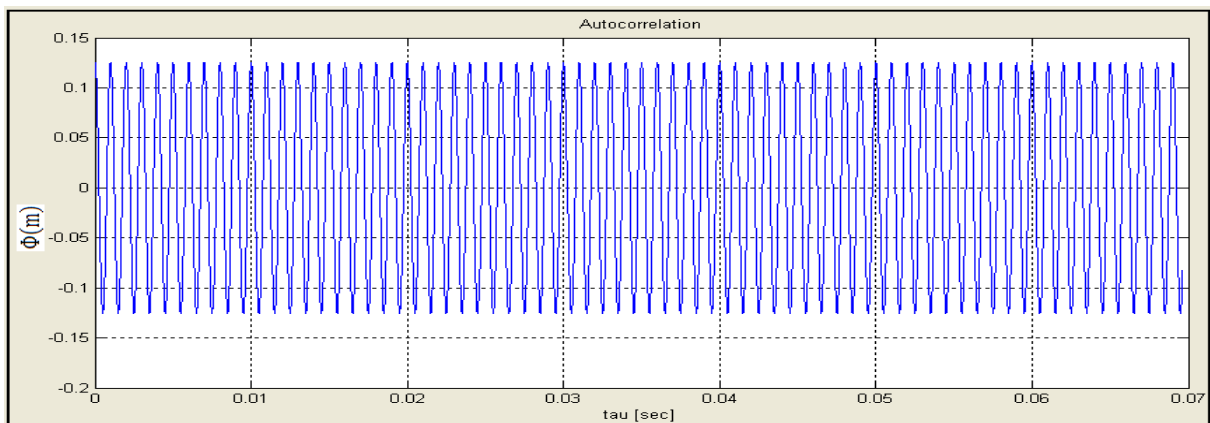
összefüggésekkel írhatók le (ahol  $F\{\Phi(n)\}$  és  $F^{-1}\{W(m)\}$  a Fourier- és inverz Fourier-transzformációt jelöli).

Így tehát a (diszkrét) autokorreláció-függvényt az inverz diszkrét Fourier-transzformáció felhasználásával, közvetlenül a teljesítménysűrűség-spektrumból meg lehet határozni (4.4. ábra).



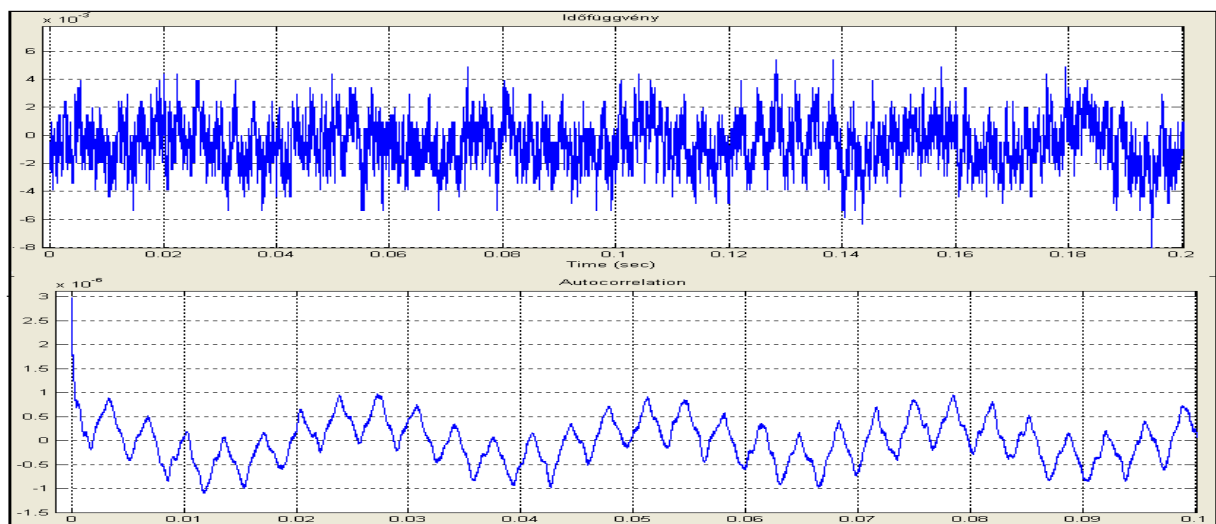
4.4. ábra: Az autokorreláció-függvény meghatározása a Wiener-Hincsin-tétel alapján

- Az autokorreláció-függvény nem tartalmazza a jel fázisinformációját, s ezért a jelet visszafelé már nem lehet helyreállítani.
- Tisztán periodikus folyamat autokorreláció-függvénye a  $\tau$  függvényében nem cseng le. Egy periodikus folyamat autokorreláció-függvénye ismét az eredeti függvény  $\tau$  periódusidejének megfelelő periódusidejű, periodikus függvény (4.5.ábra).



**4.5 ábra:** 140 msec hosszú, 1kHz-es szinusz jel autokorreláció-függvénye a (4.2.) egyenlet alapján számítva.

Az autokorreláció-függvény felhasználásával zajfolyamatokkal elfedett periodikus jeleket lehet észlelni amire a 4.6. ábrán láthatunk példát.



**4.6. ábra:** Zajjal elfedett periodikus jelek észlelése: felül a jel időfüggvénye, alul pedig az autokorreláció-függvénye látható.

#### 4.4. Cepstrumanalízis

A jelek széles csoportját az jellemzi, hogy spektrumuk több részspektrum szorzataként fogható fel, amit a következőképpen lehet egyenletbe foglalni:

$$\underline{F}(\omega) = \underline{Q}(\omega)\underline{H}(\omega) \quad (4.7)$$

A spektrumok multiplikatív kapcsolatának az időtartományban a függvények konvolúciós kapcsolata felel meg (alapvető Fourier-tétel):

$$f(t) = q(t) * h(t) \quad (4.8)$$

Az ilyen jellegű jelek egy osztályát az jellemzi, hogy a két jelfüggvény közül az egyik az  $F(\omega)$  eredő spektrum periodikus modulációját okozza. A periodikus forrásjel diszkrét Fourier-spektrumhoz vezet, amelyben a spektrális összetevők az időben korlátozott analízis következtében szélesebbé válnak.

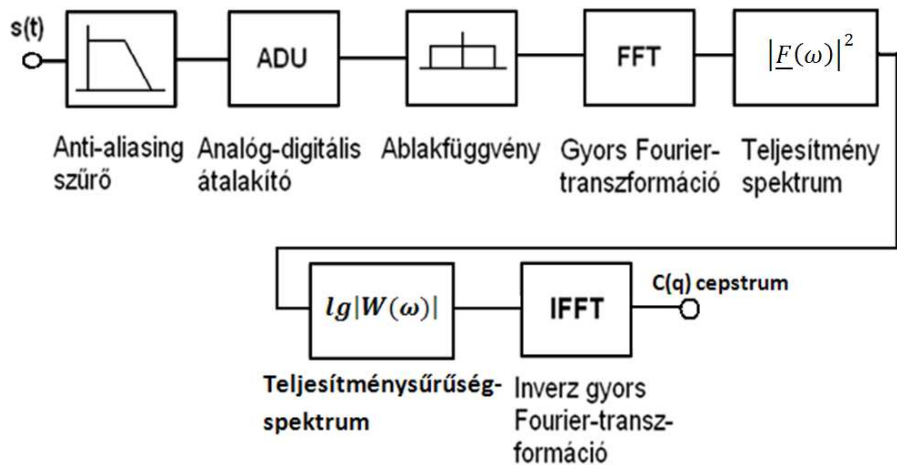
Hasonló jelenség lép fel, ha egy jelkésleltető rendszeren halad át. Különösen az ilyen típusú jelek elemzésére javasolt a cepstrumanalízis.

A Fourier-transzformáció linearitása következtében az összegzés a transzformáltak matematikai műveletként fennmarad, és így az inverz Fourier-transzformáció alkalmazásakor érvényes a következő összefüggés:

$$C(q) = F^{-1}\{\log|F(\omega)|^2\} = C_Q(q) + C_H(q) \quad (4.9)$$

Mivel az integrálást  $f$ , illetve  $\omega$  szerint végezzük el, a számítás során még figyelembe kell venni, hogy a logaritmus nemlineáris függvény. Az ennek következtében keletkező  $C_{QH}(q)$  tagot akkor lehet elhanyagolni, ha  $C_Q(q)$  és  $C_H(q)$  különböző tartományokba esnek, és így a (4.9) egyenlet jó közelítéssel érvényesnek tekinthető.

$C(q)$  egy spektrum „spektrumaként” értelmezhető, ahol  $q$  idő dimenziójú független változó. A cepstrumanalízis segítségével lehetőség nyílik a periodikus ingadozásokat tartalmazó spektrumok vizsgálatára, melynek meghatározása a 4.7. ábra szerint történik.



4.7. ábra: Cepstrum meghatározásának rendszerdiagramja

## 5. Számítógépes rendszeranalízis

A jel legtöbbször valamilyen rendszeren halad át (ami szimbolizálhat pl.: egy szűrőt vagy egy barlangot), amely hatással van az áthaladó jel egyes paramétereire. Ez a hatás lehet például frekvencia szerinti csillapítás, késleltetés, ráült zaj okozta jeltorzulás, stb.

### 5.1 A súlyfüggvény és az átviteli függvény

Egy rendszer mind a frekvencia, mind pedig az idő függvényében jól jellemezhető, ha ismerjük a gerjesztést és az arra adott választ.

A Fourier-transzformáció egy alapvető tétele, a konvolúciós tétel (3. fejezet) azt mondja ki, hogy két, egymással multiplikatív módon összekapcsolt függvény transzformáltja egyenlő az egyes függvények transzformáltjainak konvolúciójával. Ennek fordítottja is igaz, miszerint két függvény konvolúciójának transzformáltja egyenértékű az egyes függvények transzformáltjainak multiplikatív szorzatával. Az utóbbi megfogalmazásból kiindulva:

$$f(t) = s(t) * h(t) \quad (5.1)$$

$$\underline{F}(\omega) = \underline{S}(\omega)\underline{H}(\omega) \quad (5.2)$$

ahol  $s(t)$  a bemenő jel,  $h(t)$  a súlyfüggvény,  $f(t)$  a kimeneten mért jel, továbbá  $\underline{S}(\omega)$ ,  $\underline{H}(\omega)$  és  $\underline{F}(\omega)$  (ebben a sorrendben) ezek spektruma.

A ki- és bemenő jelet a konvolúció kapcsolja össze az időtartományban:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau)h(t - \tau) d\tau = s(t) * h(t) \quad (5.3)$$

A rendszer bemenetét Dirac-impulzussal ( $\delta(t)$ ) gerjesztve, ahol

$$\delta(t) = \begin{cases} 1, & \text{ha } t = 0 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases} \quad (5.4)$$

, a kimeneten impulzusválaszt generálunk. Ebben az esetben a  $h(t)$  - súlyfüggvényt és  $\underline{H}(\omega)$  - átviteli függvényt Fourier-transzformáció kapcsolja össze:

$$\underline{H}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t} dt \quad (5.5)$$

Számítógépes analízis esetén az átviteli függvény a következőképpen számítható:

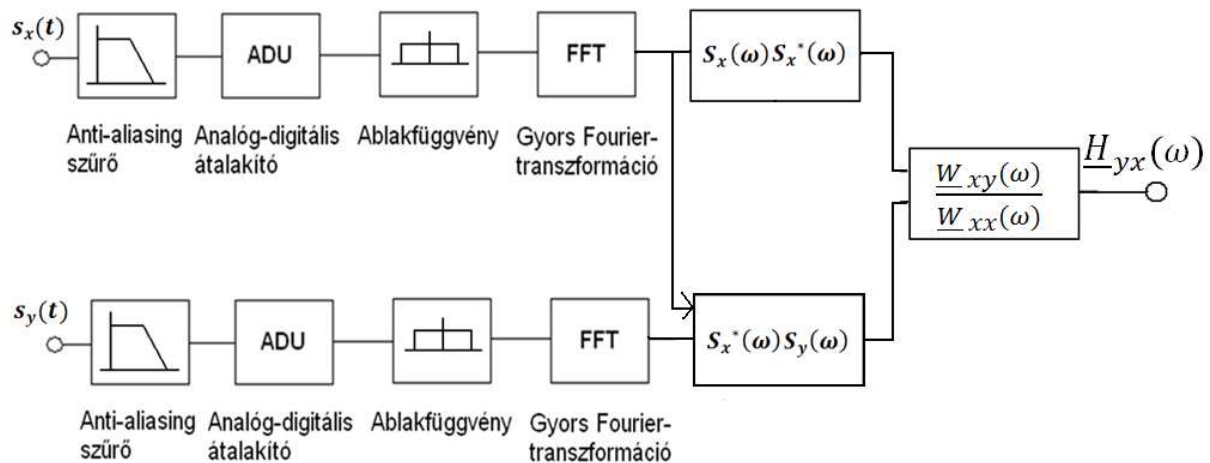
$$\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{S}_y(\omega)}{\underline{S}_x(\omega)} \quad (5.6)$$

ahol  $\underline{S}_x(\omega)$  a bemenő  $s_x(t)$  gerjesztő jelnek,  $\underline{S}_y(\omega)$  pedig a kimenő  $s_y(t)$  jelnek a spektrumát jelöli.

A  $\underline{H}(\omega)$  meghatározásához, nemdeterminisztikus jelfolyamat esetén, spektrális átlagolásra van szükség. Az átviteli függvényt általában nem az (5.6) egyenlet szerint határozzák meg, hanem a 4.8. ábra szerint részletezett módszerrel.

$$\underline{H}'(\omega) = \frac{\underline{S}_y(\omega)\underline{S}_x^*(\omega)}{\underline{S}_x(\omega)\underline{S}_x^*(\omega)} = \frac{\underline{W}_{xy}(\omega)}{\underline{W}_{xx}(\omega)} \quad (5.7)$$





4.8. ábra: Rendszerátviteli-függvény meghatározásának rendszerdiagramja

## 5.2 Teljesítményátviteli függvény

Azon rendszereket, melyek rendszerfüggvényei nemdeterminisztikus részeket tartalmaznak,  $|\underline{H}(\omega)|^2$  teljesítményátviteli függvényükkel lehet leírni:

$$|\underline{H}(\omega)|^2 = \frac{W_{yy}(\omega)}{W_{xx}(\omega)} \quad (5.8)$$

ahol  $W_{yy}(\omega)$  a kimenő jelnek,  $W_{xx}(\omega)$  a bemenő jelnek a teljesítményspektruma.

Nemdeterminisztikus jelekkel való gerjesztés esetén egy pontosabb teljesítményátviteli függvény meghatározásához spektrális átlagolás szükséges (pl.: egyes vektoranalizátorokban lehetőség van a kirajzolt bemenő jel valós idejű átlagolására).

## 5.3 Keresztkorreláció-függvény

A  $\Phi_{xy}(\tau)$  keresztkorreláció-függvény segítségével, ahol: egy rendszer  $s_x(t)$  bemenő és  $s_y(t)$  kimenő jelei közötti statisztikai összefüggést adja meg, amiből az következik, hogy valamilyen szinten a rendszer jelekre gyakorolt hatásának leírására is alkalmas.

A keresztkorreláció-függvény definíciója hasonló az autokorreláció-függvényéhez:

$$\Phi_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} s_x(t) s_y(t + \tau) dt \quad (5.9)$$

A keresztkorreláció-függvény az autokorreláció-függvénnyel ellentétben nem szimmetrikus a  $\tau = 0$  pontra, és ezen a helyen általában nincs maximuma.

Abban az esetben, ha a keresztkorrelált jelek abszolút amplitúdóértékei nagyon különbözőek, javasolt a  $\Phi_{xy}(\tau)$  helyett egy normált keresztkorreláció-függvényt használni az alábbi egyenlet szerint:

$$\varphi_{xy}(\tau) = \frac{\Phi_{xy}(\tau)}{\sqrt{\Phi_{xx}(0)\Phi_{yy}(0)}} \quad (5.10)$$

#### **5.4. Keresztteljesítménysűrűség-spektrum**

A keresztkorreláció-függvény Fourier-transzformáltja megadja a  $\underline{W}_{xy}(\omega)$  keresztteljesítménysűrűség-spektrumot:

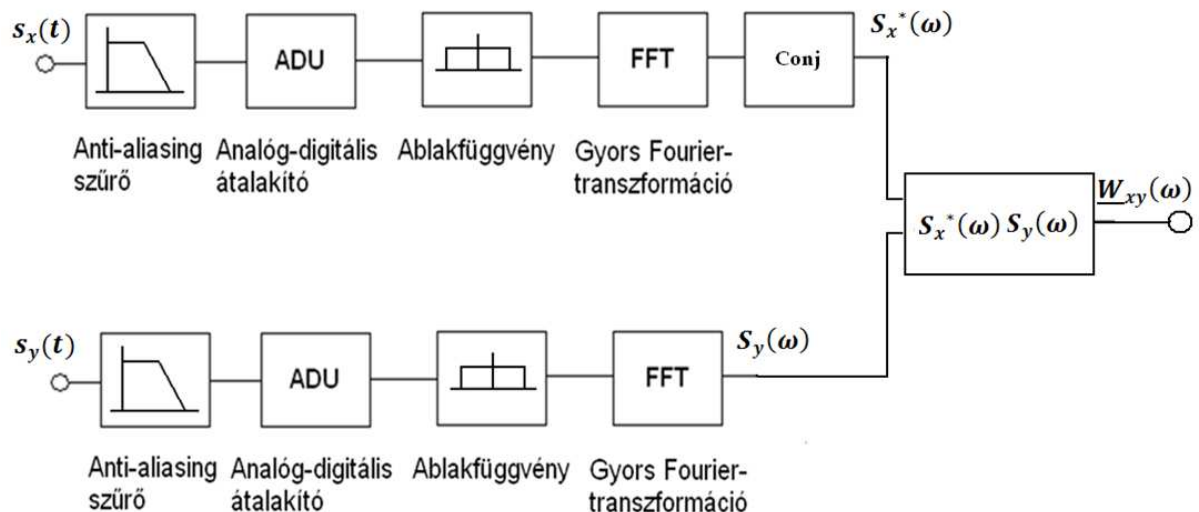
$$\underline{W}_{xy}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{xy}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (5.11)$$

, amely függvény az autoteljesítménysűrűség-függvénnyel szemben komplex jellegű, tehát tartalmazza a teljes fázisinformációt is.

A teljesítményspektrum meghatározásához hasonlóan a  $\underline{W}_{xy}(\omega)$  keresztteljesítménysűrűség-függvénynek is van egy másik, gyorsabb számítási módszere (Fourier-transzformációs tételnek köszönhetően):

$$\underline{W}_{xy}(\omega) = S_y(\omega) S_x^*(\omega) \quad (5.12)$$

ahol  $S_y(\omega)$  a kimenő jel amplitúdóspektruma,  $S_x^*(\omega)$  pedig a bemenő jel amplitúdóspektrumának a konjugáltja.



4.9. ábra: Keresztteljesítménysűrűség-spektrum meghatározásának rendszerdiagramja

A keresztkorreláció-analízis legfontosabb alkalmazási területe a jelfutási idők észlelése.

### 5.5. Koherenciafüggvény

A koherenciafüggvény megadja egy rendszer bemenő és kimenő jeleihez tartozó teljesítményspektrumok, valamint az (5.10) egyenlet szerinti kereszteljesítmények közötti kapcsolatot. A koherenciafüggvény elsősorban a zajjal gerjesztett rendszerek vizsgálatokor használatos, ennek definíciója:

$$\gamma^2(\omega) = \frac{|W_{xy}(\omega)|^2}{W_{xx}(\omega)W_{yy}(\omega)} \quad (5.13)$$

ahol  $0 < \gamma^2(\omega) < 1$

A koherenciafüggvény a rendszer kimenő jelének a rendszer bemenő jelével koherens teljesítményhányadát határozza meg. Nem zavart, determinisztikus, lineáris rendszer esetén ennek értéke a frekvenciától függetlenül egységnyi. Tehát az egységnyi értéktől való eltérés a rendszerben előforduló valamilyen zavar mértékére utal.

## 6. MATLAB ismertetése

A MATLAB (MATrix LABoratory) egy rendkívül hasznos és hatékony programrendszer, mely lehetővé teszi az összetett tudományos és műszaki számítások (pl.: numerikus analízis, mátrix algebra, jelfeldolgozás) gyors kiértékelését, valamint a számítási eredmények grafikus megjelenítését.

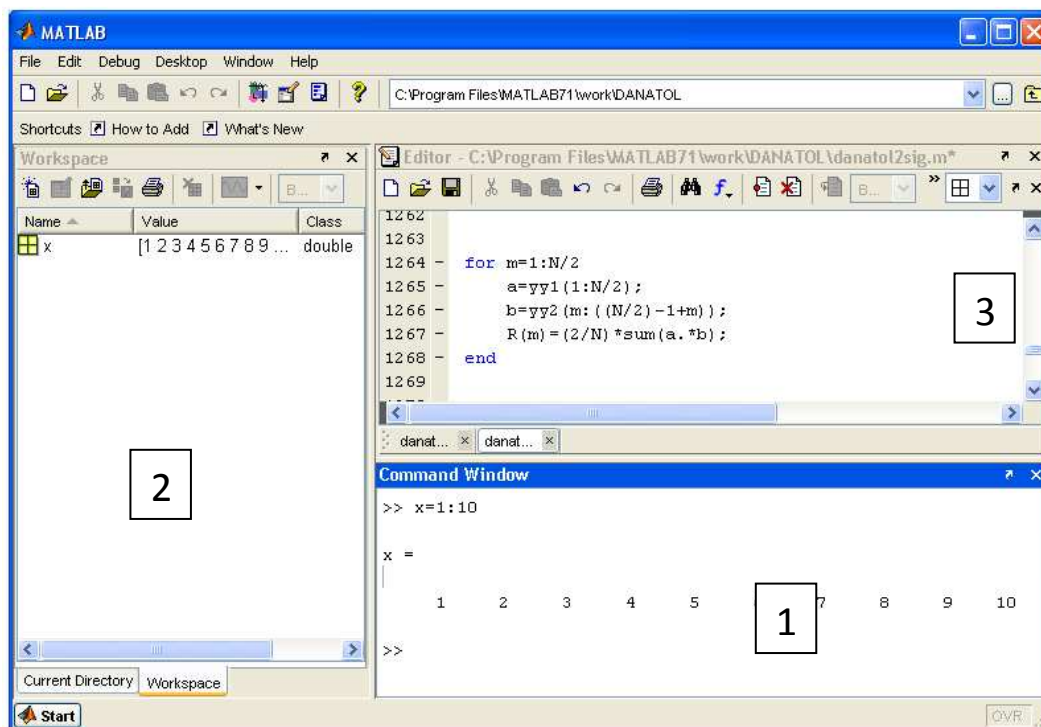
A program egyik nagy előnye, hogy „felhasználóbarát”, viszonylag könnyen kezelhető, parancsai legtöbbször asszociatívák és könnyen megjegyezhetők.

A MATLAB mindezen felül úgynevezett eszköztárakkal is ki van egészítve, amelyek egy-egy speciális feladatosztály megoldására létrehozott MATLAB-függvények (M-fájlok) átfogó gyűjteményei. Ezek az eszköztárak számos tudományos területet lefednek, többek között ilyen a jelfeldolgozás, optimalizálás, az irányítási rendszerek, stb.

### 6.1. MATLAB indítása

A MATLAB indító ikonjára kattintva megjelenik egy alapértelmezett ablak, amely három fő részből tevődik össze. Ezek a következők:

- 1) Parancsablak (Command Window);
- 2) „Munkaasztal” (Workspace)
- 3) „\*.m” kiterjesztésű fájl szerkesztésére alkalmas ablak (Editor)



6.1. ábra: MATLAB főablak

A programnyelv alapértelmezetten valós idejű, vagyis a parancsokat a 6.1. ábrán az 1-es számmal jelölt Command Window ablakba soronként begépelve azok az Enter billentyű lenyomására azonnal végrehajtnak. Az összetettebb, egymásra épülő műveleteket (ilyen pl. egy „for-ciklus”) a 3-as ponttal jelölt Editor részbe érdemes bejegyezni, majd a kész egyenletkomplexum minden sora az „F5” billentyű aktiválását követően végrehajtnak.

Abban az esetben, ha hibát észlel a program a parancssorok kiértékelése során, könnyen értelmezhető hibaüzenetet jelez.

A MATLAB részletes és hasznos Help menüvel rendelkezik, melynek igénybevétele kétféleképpen történhet. Ha nem ismerjük egy parancs működését, vagy szintaxisát, (példaként legyen ez most az conv parancs), akkor a parancssorba beütve a következőt:

```
>> help conv
```

válaszul ezt kapjuk:

*CONV Convolution and polynomial multiplication.*

*C = CONV(A, B) convolves vectors A and B. The resulting vector is length LENGTH(A)+LENGTH(B)-1.*

*If A and B are vectors of polynomial coefficients, convolving them is equivalent to multiplying the two polynomials.*

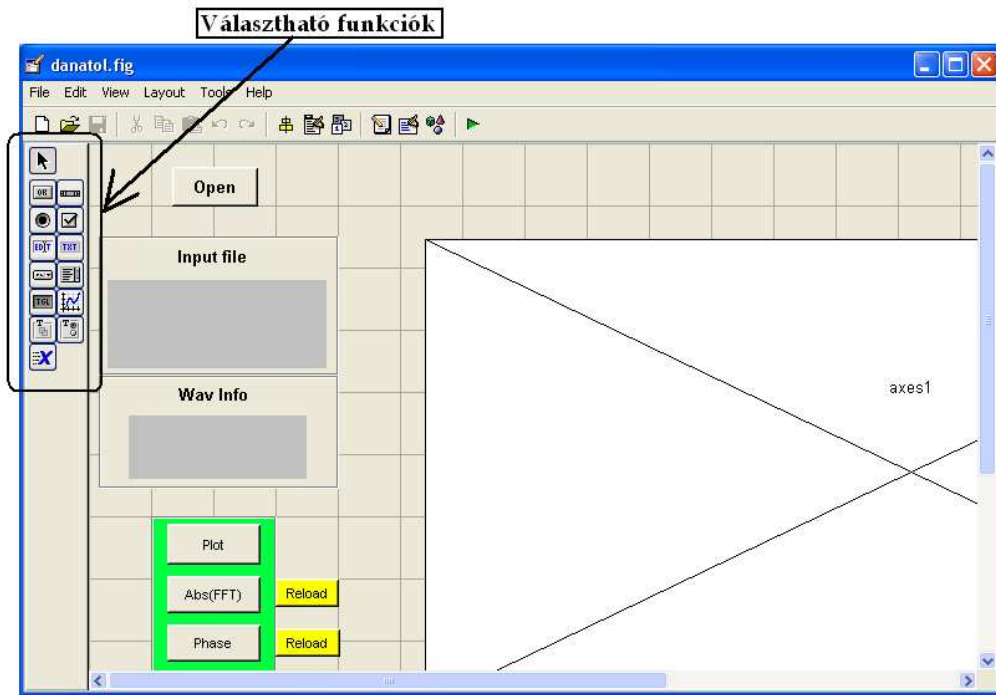
*See also deconv, conv2, convn, filter and, in the Signal Processing Toolbox, xcorr, convmtx.*

Az „F1” billentyű lenyomásával közvetlenül elérhető a részletes Help menü, amelynek a Search fülénél, a „Search for:” mezőbe begépelve bármely létező parancsot, általában kielégítő eligazítást kapunk.

A programkészítéshez szükséges fontosabb MATLAB függvények és műveletek egy részét, jellegük szerint csoportosítva a Függelékben találjuk meg.

## **6.2. Grafikus felület létrehozása**

A program készítés során a MATLAB egyik eszköztárának köszönhetően lehetőség van a felületet interaktívan, grafikus formában megtervezni. Ezen funkció elérési útvonala a következő: *Alapértelmezett főablak*-> *Start (bal alsó sarokban található)*-> *MATLAB* -> *GUIDE (GUI Builder)*.



**6.2. ábra:** GUI Builder megnyitása

GUI Builder ablakának bal oldalán található az eszköztár (6.2. ábra). Ennek néhány funkciója felsorolva: Push Button, Radio Button, Edit Text / Static Text, Slider, Axes.

A GUIDE alatt készített munkánk első mentése során létrejön egy „.fig” és egy „.m” kiterjesztésű fájl. Utólag az egyes grafikus funkciókhoz, mint például egy nyomógomb (PushButton), a „.m” fájlban rendelünk hozzá végrehajtandó parancsokat.

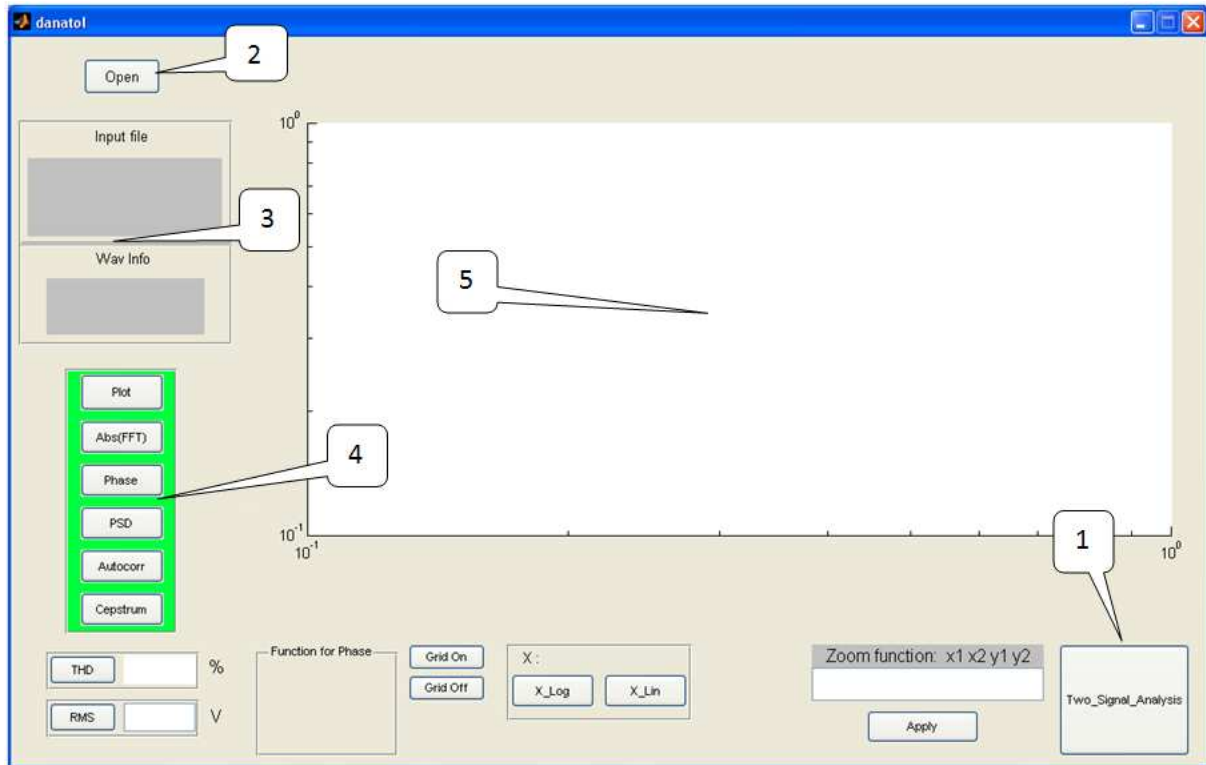
### **6.3. Akusztikai mérőprogram-modul használata**

A program helyes működéséhez a „danatol.m”, „danatol.fig”, „danatol2.m”, „danatol2.fig” nevű fájloknak ugyanazon mappában kell tárolódniuk. A mérőprogram indítása a „danatol.m” fájl betöltésével és annak lefuttatásával történik.

A mérőprogram-modul egy „danatol” azonosítóval ellátott, egyjeles vizsgálatra alkalmas, továbbá egy „danatol2” azonosítóval rendelkező, kétjeles analízisre használható részekből áll.

### 6.3.1 Az egyjeles analízis

Az egyjeles vizsgálat indításához a „danatol.m” fájl indítását követően a 6.3. ábrán látható ablak jelenik meg.



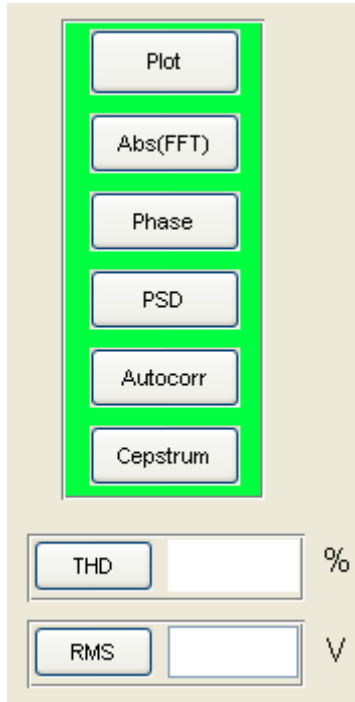
**6.3. ábra:** Az akusztikai mérőprogram-modul egyjeles vizsgálatra tervezett részének grafikus felülete. 1) Kétjeles vizsgálat indítása 2) „\*.wav” fájl betöltése egyjeles analízishez 3) A betöltött fájl elérési útvonala és néhány fontos, jelre vonatkozó információ 4) Az egyjeles vizsgálatához rendelt funkciók 5) A függvény kirajzolásának helye

Az „Open” gomb (6.3.ábra 2.pont) megnyomását követően betölthetjük az analizálni kívánt jelünket. Fontos megjegyezni, hogy ez esetben csak „.wav” kiterjesztésű fájlok betöltése engedélyezett, ellenkező esetben hibaüzenet érkezik a MATLAB parancsablakára.

Sikeres beolvasást követően néhány fontosabb információ látható a megnyitó gomb alatt. Az „Input file” textben a betöltött fájl elérési útvonala, továbbá a „Wav Info” textben a vizsgálandó jelre vonatkozó fontosabb adatok jelennek meg.

### 6.3.1.1. Analizálási lehetőségek

A 6.3. ábra 4. pontja által jelzett részben található meg a jel különböző analizisét megvalósító és annak eredményét kirajzoló funkciógombok, melyek a következők:



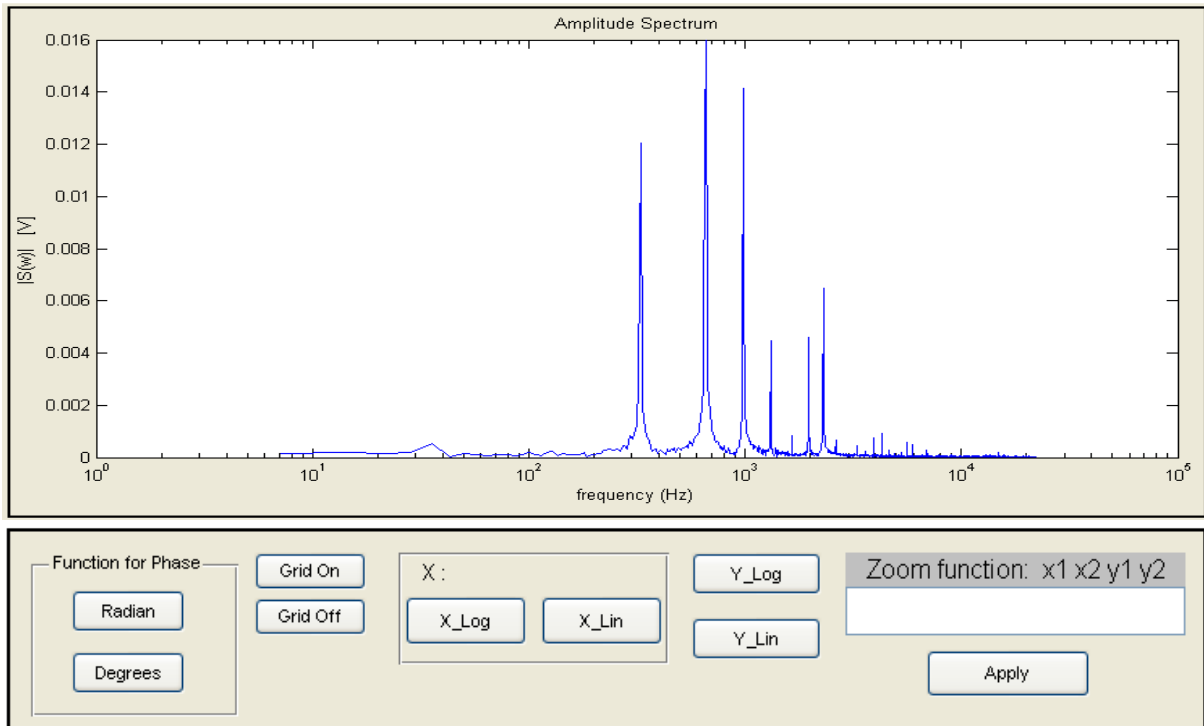
1. **Plot:** Időfüggvény ábrázolása
2. **Abs(FFT):** Amplitúdóspektrum ábrázolása
3. **Phase:** Fázisspektrum ábrázolása
4. **PSD:** Teljesítménysűrűségspektrum
5. **Autocorr:** Autokorrelációs analízis
6. **Cepstrum:** Cepstrum analízis
7. **THD:** Teljes harmonikus torzítás számítása
8. **RMS (Root Mean Square) :** Effektív érték számítása

6.4. ábra: Egyjeles vizsgálat funkciógombjai



### 6.3.1.2 További funkciógombok

A vizsgálandó jel betöltését és valamely analizését követően az eredmény a 6.3. ábra 5-ös pontja által jelzett résznél rajzolódik ki.



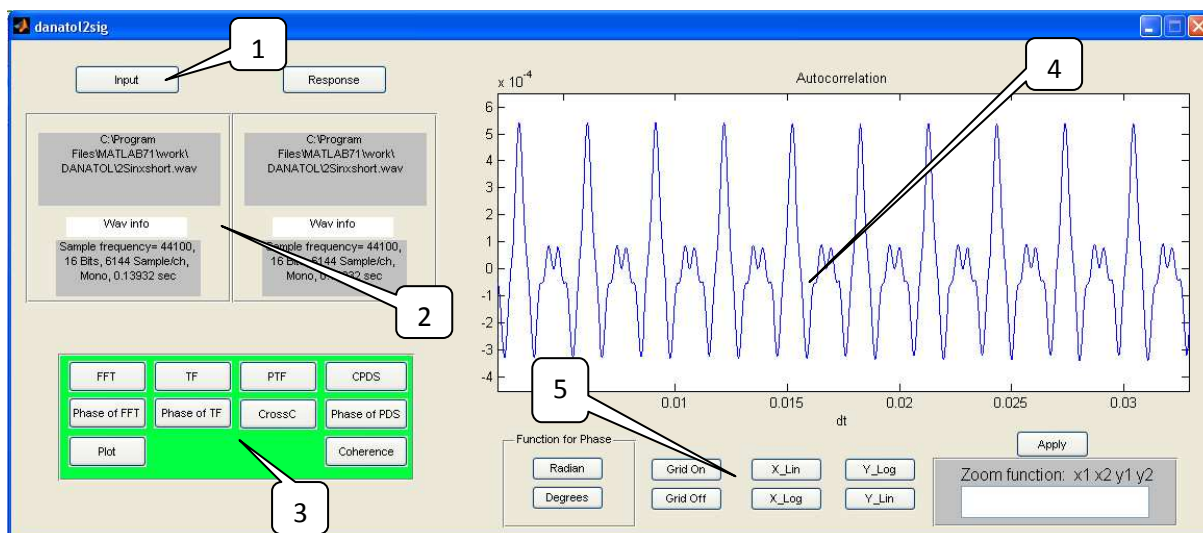
6.5. ábra: Az analízálási eredmény kirajzolása (felül), egyéb funkciók (alul)

A 6.5. ábra alsó részében található egyéb funkciók a függvény egyszerűbb áttekinthetőségét, átrajzolását segítik.

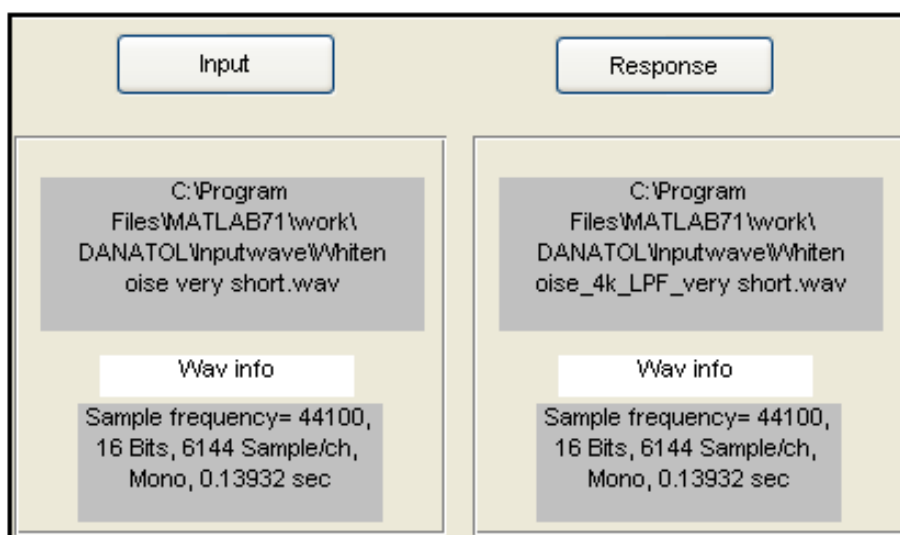
1. *Function of Phase:* A Fázisspektrumot tetszés szerint radiánban vagy fokban jeleníti meg. Ez a funkció csak a „Phase” gomb megnyomását követően aktiválódik.
2. *Grid on/off:* Segítségével berácsozhatjuk a függvényt.
3. *X\_Log, X\_Lin:* Vízszintes tengely logaritmikus, ill. lineáris ábrázolása.
4. *Y\_Log, Y\_Lin:* Függőleges tengely logaritmikus, ill. lineáris ábrázolása.
5. *Zoom-function:* Betáplált koordináták által meghatározott függvényrészletet nagyít ki. X1: vízszintes tengely minimuma, X2: vízszintes tengely maximuma, Y1: függőleges tengely minimuma, Y2: függőleges tengely maximuma

## 6.3.2 Kétjeles analízis

A kétjeles vizsgálat indítása a 6.3. ábra jobb alsó sarkában megtalálható „Two\_Signal\_Analysis” gomb megnyomásával, vagy a „danatol2.m” fájl betöltésével történhet.



6.6. ábra: Az akusztikai mérőprogram-modul kétjeles vizsgálatra tervezett részének grafikus felülete. 1) „.wav” fájlok betöltése 2) Néhány fontosabb információ a betöltött fájlokról 3) A kétjeles vizsgálatához rendelt funkciók 4) A függvény kirajzolásának helye 5) Egyéb kiegészítő funkciók.



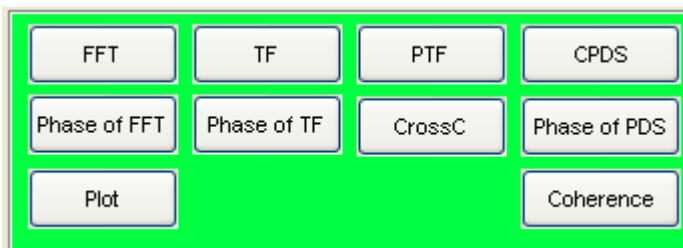
6.7. ábra: Fájlok beolvasása, fontosabb információk megjelenítése (fájl elérési útvonala, a jel mintavételi frekvenciája, kvantálási felbontás, mintaszám, időhossz)

A 6.7. ábrán látható „Input” gombbal a rendszert gerjesztő jelet, míg a „Response” gombbal a gerjesztésre adott válaszjelet tölthetjük be (fontos, hogy ügyeljünk a megfelelő sorrendre). Sikeres beolvasást követően néhány fontosabb információ jelenik meg az említett gombok alatt.

### **6.3.2.1 Analízálási lehetőségek**

A kétjeles vizsgálatra vonatkozó funkciógombokat a 6.8. ábrán láthatjuk, melyek jelentése a következő:

1. **Plot:** Jelek időfüggvényeinek kirajzolása
2. **FFT:** Jelek Amplitúdó-spektrumának megjelenítése
3. **Phase of FFT:** Jelek fázisspektrumának megjelenítése
4. **TF:** Átviteli-függvény abszolút értéke
5. **Phase of TF:** Átviteli-függvény fázisa
6. **PTF:** Teljesítményátviteli-függvény
7. **CrossC:** Keresztkorreláció-függvény
8. **CPSD:** Kereszteljesítménysűrűség-spektrum
9. **Phase of CPSD:** Kereszteljesítménysűrűség-spektrum fázisa
10. **Coherence:** Koherencia-függvény



**6.8. ábra:** Kétejeles analízis funkciógombjai

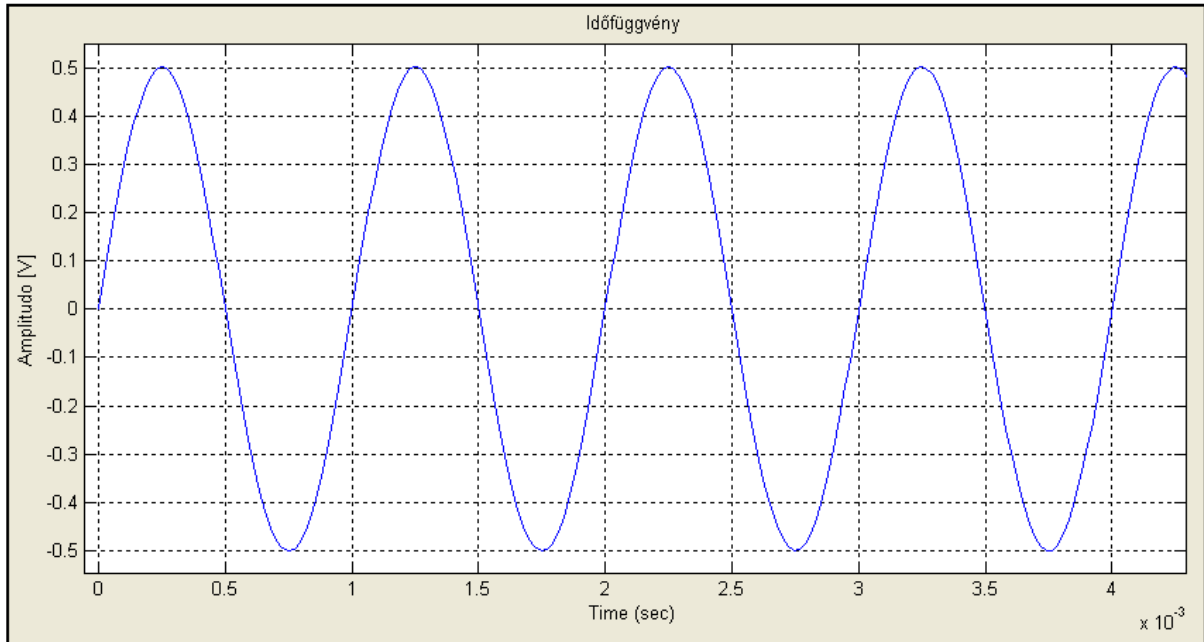
A 6.9. ábrán található egyéb funkciók (a 6.5. ábrához hasonlóan) a függvény egyszerűbb áttekinthetőségét segítik, melyek használata a 6.3.1.2. fejezetben található leírással megegyezik.



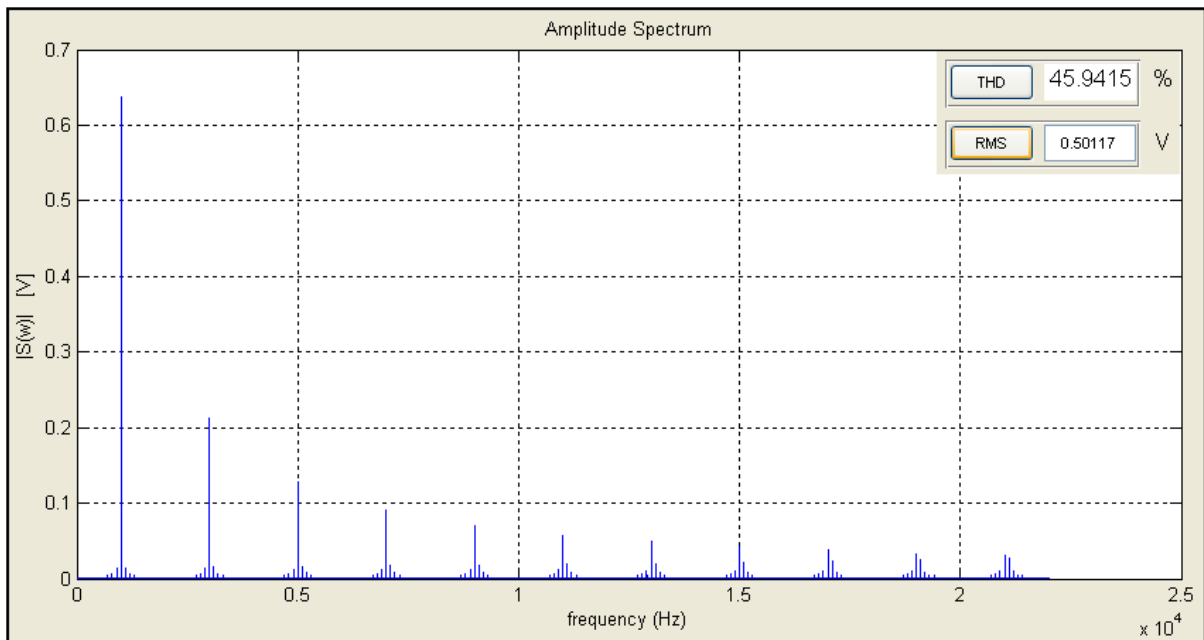
**6.9. ábra:** Egyéb funkciók

## 7. Mérőprogram tesztelése

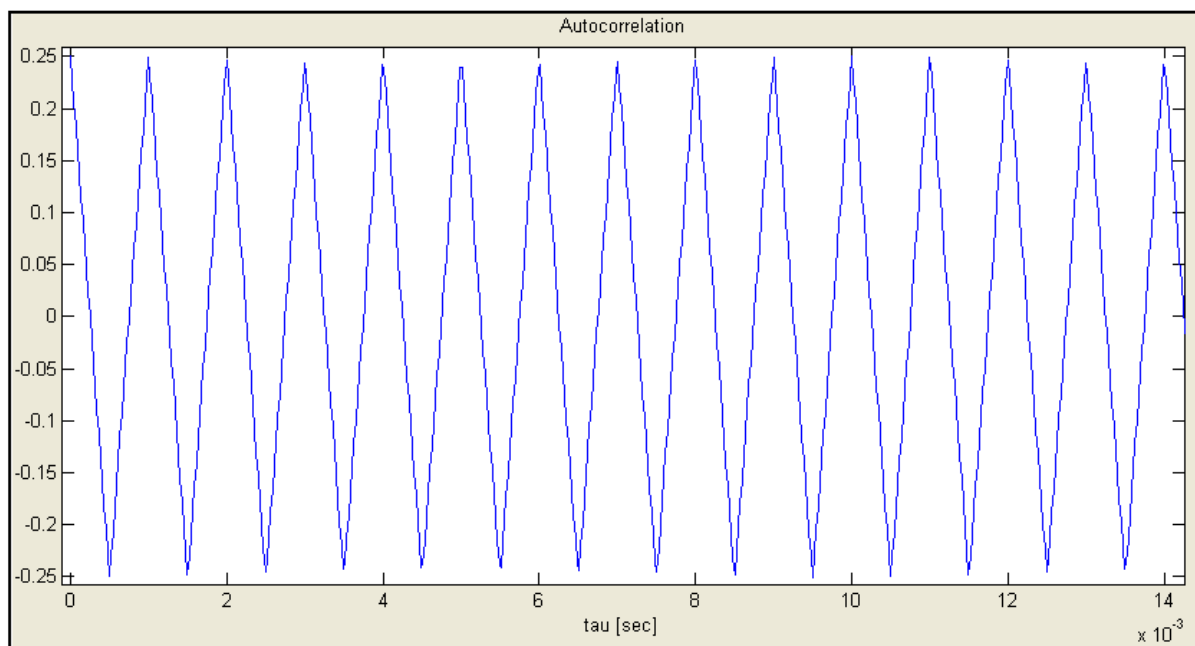
A mérőprogram-modul néhány ismert jel (szinusz-jel, Gaussi-zaj, négyszögjel) segítségével lett letesztelve. Az eredmény az alábbi ábrákon van megjelenítve:



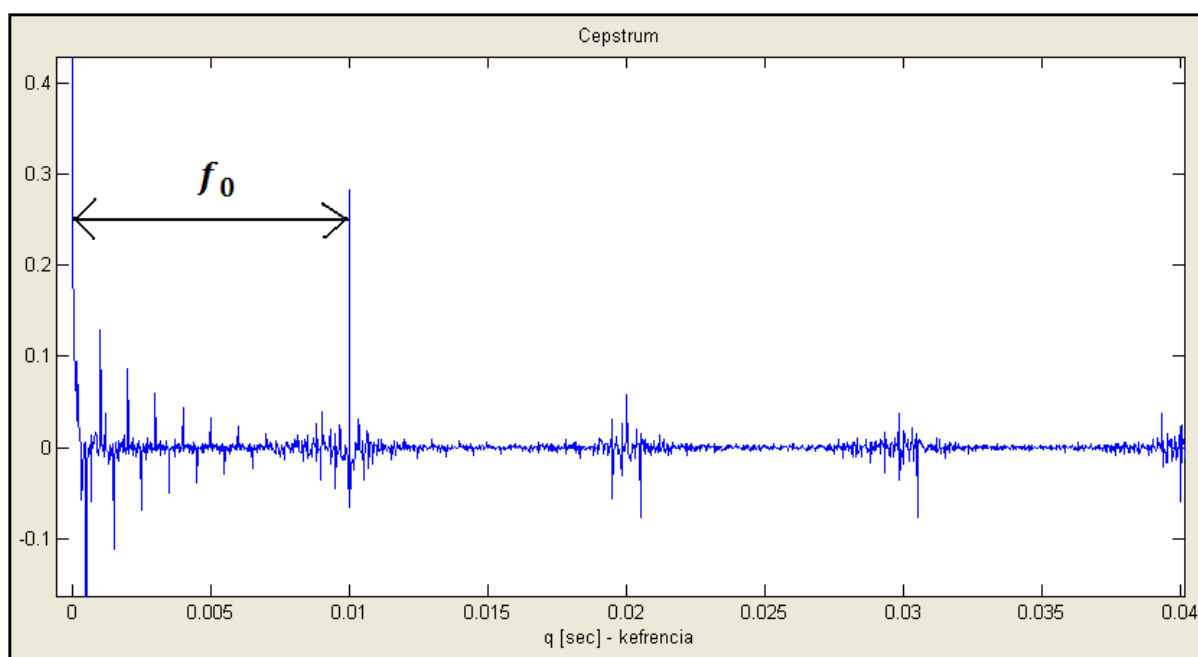
7.1. ábra: 1 kHz-es szinusz jel időfüggvénye



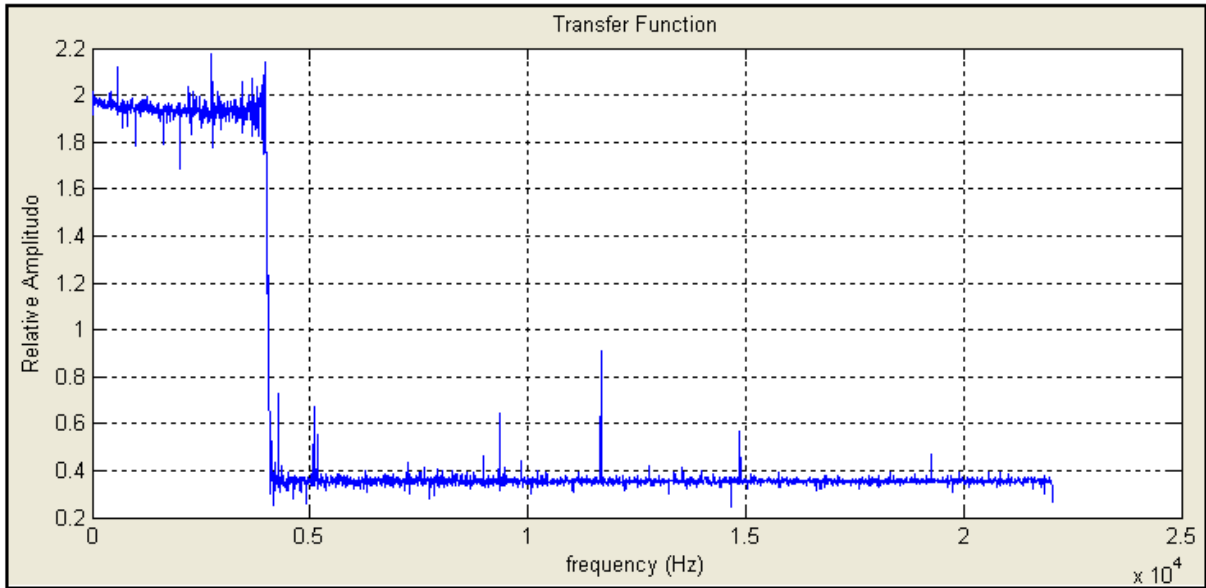
7.2. ábra: 1 kHz-es négyszögjel amplitúdóspektruma, THD (45.94 %) és RMS (0.5 V) értéke



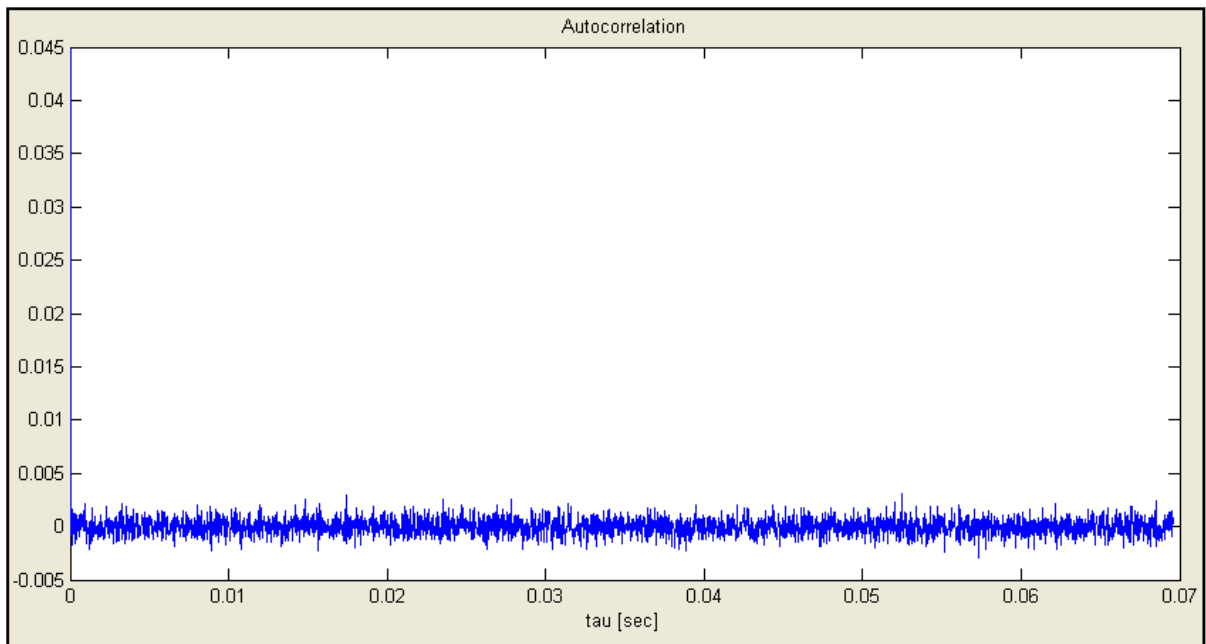
7.3. ábra: 1 kHz-es négyzögjel autokorrelációja



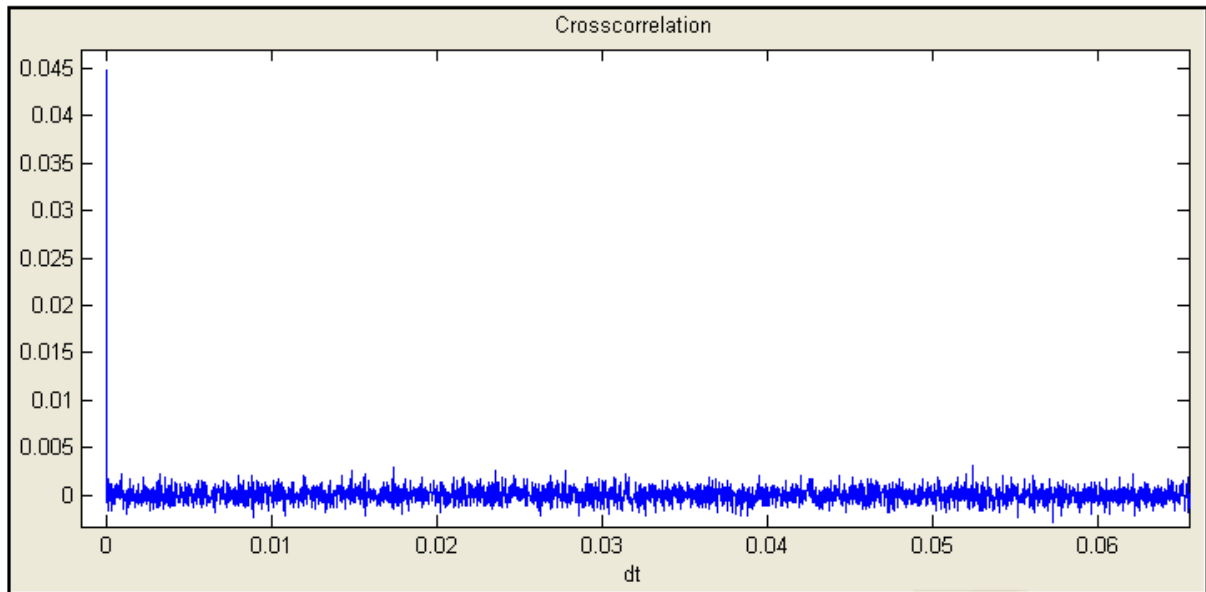
7.4. ábra: 1 kHz-es négyzögjel cepstrum analízise.



7.5. ábra: Szélessávú fehérzajjal gerjesztett, és egy 4 kHz határfrekvenciájú fehérzajjal válaszoló rendszer átviteli függvénye.



7.6. ábra: Fehérzaj autokorrelációja



7.1 ábra: Gaussi-zaj önmagával képezett keresztkorrelációja (ami ebben az esetben meg kell, hogy egyezzen az autokorreláció eredményével).

## 8. Összefoglalás

A dolgozat során a teljesség igényét követően alaposan megismertük az analóg és digitális jelek szerkezetét, továbbá minden jeltípusra kiterjesztettük a Fourier-tétel alkalmazhatóságát. Megismertünk két alapvető fontosságú Fourier-transzformációs eljárást. A Gyors Fourier-transzformáció előnyeire építkezve létrehoztam egy olyan mérőprogram-modult MATLAB alatt, amellyel lehetőségünk nyílik statisztikus folyamatok általános vizsgálatára és a rendszeranalízisre.

## 9. Irodalomjegyzék

- [1] – Richard G. Lyons – Understanding Digital Signal Processing (2001)
- [2] – Dr. Kovács Ernő, Elektronika I., Miskolczi egyetem, villamosmérnöki intézet
- [3] – Wersényi György - Műszaki akusztika  
<http://vip.tilb.sze.hu/~wersenyi/MA1.pdf>
- [4] – Michael Parker – Digital Signal Processing (2010)
- [5] – Norbert Hesselmann – Digitális Jelfeldolgozás
- [6] – Rendszerleírási módszerek jellemzése:  
[http://e-oktat.pmmf.hu/jelek1 fejezet3](http://e-oktat.pmmf.hu/jelek1_fejezet3)
- [7] – Mérési segédlet (Hangtechnikai Laboratórium 2.)  
[http://vibac.hit.bme.hu/download/Hangtechnika Labor 2/](http://vibac.hit.bme.hu/download/Hangtechnika_Labor_2/)
- [8] – Stoyan Gilbert – Matlab 4. és 5. verzió
- [9] – Duane Hanselman & Bruce Littlefield – Mastering Matlab 6
- [10] – Salamon Júlia – Informatika I. (Matlab)  
<http://www.emte.siculatorum.ro/~salamonjulia>
- [11] – [www.mathworks.com](http://www.mathworks.com)
- [12] – <http://www.david-lindsay.co.uk/teaching/MATLABBasics.pdf>



## 10. Függelék

### Mátrix műveletek:

+	összeadás
-	kivonás
*	szorzás
/	jobb oldali osztás
\	bal oldali osztás
^	hatvány
'	konjugált képzés

### Tömb műveletek:

+	összeadás
-	kivonás
.*	szorzás
./	jobb oldali osztás
.\	bal oldali osztás
.^	hatvány
.'	konjugált képzés

### Relációk és logikai műveletek:

<	kisebb mint
<=	kisebb mint vagy egyenlő
>	nagyobb mint
>=	nagyobb mint vagy egyenlő
==	egyenlő
~=	nem egyenlő
&	És
	Vagy
~	Nem

### Speciális karakterek:

=	értékadás
[	mátrix és vektor megadása
]	ld. [
(	aritmetikai kifejezés precedenciája
)	ld. (
.	tizedespont
...	következő sorban folytatódó kifejezés

,	index és függvény argumentum elválasztó
;	sor vége, kiíratás letiltása
!	rendszer parancs végrehajtása

*Szövegek és szöveges változók:*

<b>abs</b>	szöveges változó konverziója ASCII értéké
<b>eval</b>	szöveges változóban megadott makro értéke
<b>num2str</b>	szám konverziója szöveges változóvá
<b>int2str</b>	integer konverziója szöveges változóvá
<b>sprintf</b>	szám konverziója szöveges változóvá
<b>isstr</b>	szöveges változó detektálása
<b>strcmp</b>	szöveges változók összehasonlítása
<b>hex2num</b>	hexadecimális szöveges változó konverziója számmá

*Grafikus függvények:*

<b>plot</b>	X-Y rajz készítése lineáris skálával
<b>loglog</b>	X-Y rajz készítése logaritmikus skálával
<b>semilogx</b>	X-Y rajz készítése logaritmikus x skálával
<b>semilogy</b>	X-Y rajz készítése logaritmikus y skálával
<b>polar</b>	polár koordinátás rajz
<b>mesh</b>	3 dimenziós felület rajzolása
<b>contour</b>	szintvonalak rajzolása
<b>meshdom</b>	mátrix előállítás a 3 D-s felület rajzolásához
<b>bar</b>	bar diagram rajzolása
<b>stairs</b>	lépcsős ábrázolás (mintavételezett adatokhoz)
<b>errorbar</b>	hibagráf rajzolása

*Grafika szerkesztés:*

<b>title</b>	rajz címének kiírása
<b>xlabel</b>	x koordináta feliratozás
<b>ylabel</b>	y koordináta feliratozás
<b>grid</b>	háló rajzolása a grafikonra

<b>text</b>	szöveg elhelyezése a grafikonon
<b>gtext</b>	szöveg elhelyezése a grafikonon (egérrel)
<b>ginput</b>	input a grafikus képernyőről

*Grafikus ablak kezelés:*

<b>axis</b>	kézi koordináta skálázás
<b>hold</b>	grafika tartása a képernyőn
<b>shg</b>	grafikus képernyőre kapcsolás
<b>clg</b>	grafikus képernyőre törlése
<b>subplot</b>	grafikus képernyő részekre bontása

*Program végrehajtást vezérlő parancsok:*

<b>if</b>	feltételes elágazás
<b>elseif</b>	feltételes elágazás ( <b>if</b> paranccsal alkalmazva)
<b>else</b>	feltételes elágazás ( <b>if</b> paranccsal alkalmazva)
<b>end</b>	if, for, while lezárása
<b>for</b>	ciklus szervezés
<b>while</b>	ciklus szervezés
<b>break</b>	kilépés a <b>for</b> , <b>while</b> ciklusból
<b>return</b>	visszatérés a függvényből
<b>pause</b>	várakozás

*Diszk fájlok:*

<b>chdir</b>	könyvtár váltás
<b>delete</b>	fájl törlés
<b>diary</b>	inputok és az outputok naplózása fájlba
<b>dir</b>	fájlok listázása
<b>load</b>	változók beolvasása fájlból
<b>save</b>	változók kiírása fájlba
<b>type</b>	függvény vagy fájl listázása
<b>what</b>	diszken lévő M-fájlok listázása
<b>fprintf</b>	kiírás fájlba
<b>pack</b>	memória felszabadítás

*Trigonometrikus függvények:*

<b>sin</b>	szinusz
<b>cos</b>	koszinusz
<b>tan</b>	tangens
<b>asin</b>	arkusz szinusz
<b>acos</b>	arkusz koszinusz
<b>atan</b>	arkusz tangens
<b>atan2</b>	komplex szám által meghatározott szög
<b>sinh</b>	szinusz hiperbolikus
<b>cosh</b>	koszinusz hiperbolikus
<b>tanh</b>	tangens hiperbolikus
<b>asinh</b>	arkusz hiperbolikus
<b>acosh</b>	arkusz hiperbolikus
<b>atanh</b>	arkusz hiperbolikus

*Elemi matematikai függvények*

<b>abs</b>	abszolút érték
<b>angle</b>	fázisszög
<b>sqrt</b>	négyzetgyök
<b>real</b>	valós rész
<b>imag</b>	képzetes rész
<b>conj</b>	komplex konjugált
<b>round</b>	kerekítés a legközelebbi egészhez
<b>fix</b>	kerekítés a 0 irányába
<b>floor</b>	kerekítés a $-\infty$ irányába
<b>ceil</b>	kerekítés a $+\infty$ irányába
<b>sign</b>	előjel függvény
<b>rem</b>	osztás maradéka
<b>exp</b>	exponenciális
<b>log</b>	természetes alapú logaritmus
<b>log10</b>	tizes alapú logaritmus

*Adat analízis:*

<b>max</b>	maximum érték
<b>min</b>	minimum érték
<b>mean</b>	átlag érték
<b>median</b>	medián érték
<b>std</b>	szórás
<b>sort</b>	sorba rendezés
<b>sum</b>	összeg

<b>prod</b>	szorzat
<b>cumsum</b>	kumulatív összeg
<b>cumprod</b>	kumulatív szorzat
<b>diff</b>	közelítő deriváltak
<b>hist</b>	hisztogram
<b>corrcoef</b>	korrelációs koefficiens
<b>cov</b>	kovariancia
<b>cplxpair</b>	komplex konjugált párokká alakítás

*Jelfeldolgozás:*

<b>abs</b>	komplex szám abszolútértéke
<b>angle</b>	fázisszög
<b>conv</b>	konvolúció
<b>corrcoeff</b>	korrelációs koefficiens
<b>cov</b>	kovariancia
<b>deconv</b>	dekonvolúció
<b>fft</b>	fast Fourier transzformáció
<b>fft2</b>	két dimenziós FFT
<b>ifft</b>	inverz fast Furier transzformáció
<b>ifft2</b>	inverz két dimenziós FFT
<b>fftshift</b>	<b>fft</b> és <b>fft2</b> output átrendezés